

ZHONGGUO/CHUANTONG/YINYUEXUE

/CONGSHU/zhongguo/chuantong/lüxue



中国传统音乐学丛书  
丛书主编 王耀华

# 中国传统律学

李 玫 著

福建教育出版社

## 总 序

自上个世纪 90 年代以来,在对硕士、博士研究生进行教学的过程中,由于专业方向的关系,需要开设诸如《中国传统音乐概论》、《中国音乐结构学》、《中国音乐文献学》、《中国音乐美学》之类的课程,却又苦于缺乏教师、缺少较为系统的教学参考书,于是萌发了组织编写一套《中国传统音乐学丛书》的念头。

早在两千多年前中国就已出现了《乐记》、《吕氏春秋》等音乐学的代表性的著作。在相传为公孙尼子撰写的《乐记》中,论及了有关音乐本原、音乐美感、音乐的社会作用、乐和礼的关系等,是为音乐哲学的滥觞性著作。由战国末期秦相吕不韦集合门客共同编写的《吕氏春秋》,则留下了有关远古音乐、音乐与自然社会政治关系,尤其是音律方面的记载。此后,在各朝各代的志书中都有《音乐志》(或《礼乐志》),全面介绍当时的音乐制度、乐律、乐队、乐曲和礼仪规范等内容。另外,在音乐美学方面,出现了儒家、道家、墨家的音乐美学思想,如嵇康的《声无哀乐论》、周敦颐的“淡”“和”、朱熹的“中和”和徐上瀛《谿山琴况》等音乐美学观和美学著作。在乐律学研究方面,有京房的六十律、钱乐之和沈重的三百六十律、何承天的新律、荀勖的笛律、蔡元定的三分损益十八律、朱载堉的新法密率(十二平均律)。在宫调理论方面,早在春秋战国时期就有旋宫理论和调式运用,汉代民间音乐中有“相和三调”,魏晋南北朝有清商三调、

笛上三调，隋唐时期有八声音阶、燕乐二十八调、八十四调和犯调、移调理论，宋代有“为调式”“之调式”系统，元代的北曲十七调、南曲十三调，明代的九宫，清代的南北曲各十二宫调等。在词调音乐、琴学、表演艺术理论和音乐百科全书式著作方面，有：张炎《词源》、沈括《梦溪笔谈》、王灼《碧鸡漫志》、刘向《琴说》、朱长文《琴史》、袁桷《琴述》、刘籍《琴议》、陈旸《乐书》、燕南芝庵《唱论》、周德清《中原音韵》、徐大椿《乐府传声》等。以上这些文人及其著作都曾对中国传统音乐的乐学、律学、宫调理论、美学等规律作过论述，为我们留下了宝贵的遗产。

1840年，鸦片战争的炮火惊醒了相当一部分中国人。此后，中国又迎来了中西文化交流颇为繁盛的20世纪。中国音乐家开始学习西方的音乐理论，并且试图以此来研究本民族的传统音乐，发展民族的新音乐。然而，中西文化之间，除了纯粹的自然规律，包括人类文明所创造的高科技手段的物质性规律不因国别、族别差异而有任何改变之外，在艺术规律和艺术手段之中，人们对于自然和物质手段的选择却是大异其趣的。正因为有了人的选择、加工、处理方法的不同，所以，在相同的物质根据中所表现出来的色彩、风味、性格、情趣方面却大相径庭，而出现民族特点、地方特色、时代风格的千差万别。对于音乐文化来说，物理学中的声学基本理论固然相同，音乐形态诸要素的选择和音乐审美观的理解却因民族、地域、时代的不同而形成差异。虽然中国传统音乐自古以来就在频繁的中外文化交流中，与世界各地的传统音乐相互吸收、融合，使彼此间有许多相通相同之处，但是，无论是基础理论的律、调、谱、器，或者是音乐审美的虚、实、意、象，甚至于对乐音的清、浊、纯、噪等方面，都表现出与西方音乐理论的许多差别。因此，整理自己传统乐学、律

学、音乐美学的历史理论，总结可供当前民族音乐使用的应用理论，就成为中国传统音乐研究者的使命和责任。这不仅有利于传统音乐的教学，使我们的下一代了解中国传统音乐的特殊规律，而且为正确理解民族传统音乐提供理论基础，同时也为发展民族新音乐做一些铺垫性工作。

20 世纪 20 年代以来，童斐、王光祈等先驱者进行了可贵的探索。童斐的《中乐寻源》在对中西音乐理论的相同之处作出初步总结的同时，也大略指出了中西音阶的相异。王光祈既强调“西人科学常识丰富，遇事观察锐利”，应当重视西学，又强调“虽有曾受西乐教育之士，若无本国音乐材料（乐理及作品等等），则至多只能造成一位‘西洋音乐家’而已。于‘国乐’前途，仍无何等帮助”。指出了掌握西学的目的是整理中国遗产，研究中国音乐。

20 世纪三四十年代，以吕骥为首的延安鲁艺“中国民间音乐研究会”，由王震亚、谢功成等人组成的重庆青木关音乐学院“山歌社”，以刘天华为主帅的“国乐改进社”，着力于民族民间音乐的搜集、整理，进行理论研究，努力探索新音乐创作的民族风格和时代特点。杨荫浏则熔理论与实践于一炉，献毕生精力于中国传统音乐遗产的搜集、整理、研究工作，对中国传统音乐、中国音乐史、中国传统乐律学研究作出了全面的贡献。其他如缪天瑞、沈知白、廖辅叔、曹安和、钱仁康、吉联抗等，以及 50 年代以来的李纯一、郭乃安、冯文慈、黄翔鹏、赵宋光、夏野、童忠良、汪毓和、杨匡民等，在中国音乐史学、音乐形态学、音乐文献学、音乐美学等领域辛勤耕耘，也都为中国传统音乐学的建设和发展奠定了扎实的基础。特别应提到的是，黄翔鹏对曾侯乙钟磬铭文乐学体系、中国传统音乐形态学、乐律学史、音乐考古学的研究；他所提出“传统是一条河流”的命题以及“身入古



墓，心在人间”，“神游往古，心追方来”等治学思想；他所提倡“宏观的史、论研究必与微观的艺术分析密切结合，‘言必有物，虚实并务’；打破门户之见，使史学、文献学、考古学、民族学与民俗学、乐律学等各种音乐学的边缘学科熔于一炉，来进行系统化的综合研究”的研究方法。这些对促进中国传统音乐的学术研究，具有重要的作用。

20世纪80年代以来，伴随着改革开放步伐而成长起来的中青年音乐学者，抓住时代所提供的难得机遇，投入民族音乐集成的浩大工程之中，深入民间，深入生活，在以上这些前贤的研究成果的基础上，又有新的贡献。

本丛书的诸位作者及其成果，正是这一时代的产物。他们沐浴着改革开放的春风，浸润着中华民族优秀音乐传统的雨露，吮吮着前辈、同仁的学术养分，试图对中国传统音乐理论的某些方面进行梳理、整合。这既是为有志于中国传统音乐研究的青年学子提供一些可资参考的材料，也起到为中国传统音乐学的学术建设添砖加瓦的作用。我们殷切地期待着读者无私的指教和支持，使这些成果不断地臻于更科学、系统、完善。这也是组织编写、出版该套丛书的初衷。

最后谨对本丛书各位作者的辛勤劳动致以崇高的敬意！对福建教育出版社的阙国虬社长、林毓琼主编的大力支持表示诚挚的谢忱！

王耀华 谨识

壬午年十一月三日



序论.....	(1)
一、学科定义.....	(3)
二、研究对象、范围.....	(4)
第一章 理论律学的方法.....	(7)
第一节 理论律学的基本概念.....	(9)
一、音程系数 (Intervallic coefficient) .....	(9)
二、音程值 (Intervallic value) .....	(15)
三、相对波长 (Relative wavelength) 与相对音高 (Relative pitch height) .....	(24)
四、跃迁算子 (Transition operator) 与跃程值 (Transitional intervallic value) .....	(27)
第二节 与音律相关的长度认识所经历的正反合历程 ...	(30)
一、长度比值 (Length rate): 古代各种文化用长度表述音律 .....	(30)
二、频率比值 (Frequency rate): 近现代律学研究方法的变化 .....	(32)
三、周期比值 (Vibration period rate): 现代物理学为律学思维带来质的飞跃 .....	(33)
第三节 真数与对数两个领域里的沟通对应 .....	(35)
一、用不同文化圈所用的音程值单位来表述从相对波长到相对音高的推算过程 .....	(37)

二、运算实例分析 .....	(39)
第二章 生律法的自然依据 .....	(41)
第一节 谐音列所含的自然音程 .....	(43)
一、谐音列 (Harmonic tone series) 的意义 .....	(43)
二、谐音号数与各音的比例当数一致 .....	(44)
三、真数换算成对数的基本数据表 .....	(45)
第二节 各种律制概述 .....	(48)
一、五度相生律 (System of tuning in perfect fifths 或 Pythagorean intonation) .....	(48)
二、纯律 (Just intonation) ——三、六度生律法 .....	(54)
三、平均律 .....	(60)
四、其他各种生律法 .....	(63)
第三章 律学研究历史的发展与回顾 .....	(69)
第一节 中国最早的律学实践与记载 .....	(71)
一、《管子·地员篇》——三分损益法的最早记录 .....	(71)
二、曾侯乙编钟铭文 .....	(73)
三、《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》——十二律相生而出的 最早记录 .....	(83)
第二节 律学理论的纵深发展 .....	(86)
一、《淮南子》律数——自然数的开拓 .....	(86)
二、《史记·生钟分》智慧的表述体系 .....	(95)
三、京房六十律的理论价值及其他 .....	(97)
四、钱乐之三百六十律 .....	(110)
第三节 应用律学的成果——荀勖笛律 .....	(113)
一、荀勖管口校正数的计算方法 .....	(113)
二、荀勖十二笛及开孔数据 .....	(117)
三、荀勖笛律留下的困惑 .....	(122)

第四章 新律的探索.....	(127)
第一节 何承天新律.....	(129)
第二节 刘焯律.....	(139)
第三节 王朴新律.....	(141)
第四节 蔡元定十八律.....	(146)
第五章 琴律学.....	(151)
第一节 琴上十三徽的律学内涵.....	(153)
一、安徽法.....	(154)
二、十三徽的律学规定.....	(156)
第二节 文献中记载的定弦法.....	(159)
一、朱熹所传两种定弦法.....	(159)
二、《五知斋琴谱》中记载的定弦法.....	(166)
三、《琴学入门》中记载的调弦法.....	(169)
四、琴五调的定弦方法.....	(172)
第三节 暗徽的设置.....	(181)
一、纯律规范的徽外音.....	(181)
二、《琴统·十则》中的明暗徽及三分损益律的徽外音.....	(183)
三、十分法的徽分.....	(185)
第四节 具有多维生律因素的琴律.....	(186)
一、朱熹《琴律说》.....	(187)
二、《琴书大全》中留下的详细数据.....	(189)
三、《琴书大全》中琴五调的律学表达.....	(201)
四、《琴书大全》等文献中体现出的琴律实践.....	(209)
第六章 中国对十二平均律的研究.....	(213)
第一节 朱载堉——最早创立十二平均律.....	(215)

朱载堉的计算方法·····	(216)
<b>第二节 西蒙·斯台文对十二平均律的研究</b> ·····	(220)
斯台文的计算方法·····	(221)
<b>第三节 斯台文与朱载堉的比较</b> ·····	(224)
<b>第七章 中国近现代乐律学研究状况</b> ·····	(227)
<b>第一节 20 世纪上半叶的中国律学研究</b> ·····	(229)
一、在律学研究中引进欧洲的声学、数学方法·····	(229)
二、对东西方律制进行比较研究·····	(231)
<b>第二节 20 世纪下半叶的乐律学研究</b> ·····	(233)
一、琴律研究·····	(233)
二、对曾侯乙编钟铭文的律学内涵之研究·····	(234)
三、琴律研究方法体系化·····	(236)
四、有关笛律的研究·····	(241)
五、有关中立音的研究·····	(242)
最后的话：学科发展的未来走向·····	(250)
<b>附录</b>	
<b>一、古琴各弦徽位音律表</b> ·····	(253)
<b>二、对钱乐之三百六十律的清理及补正</b> ·····	(282)
<b>三、音分与频率对照表</b> ·····	(309)
<b>参考资料</b> ·····	(316)

# 序 论

一、学科定义

二、研究对象、范围

……



## 一、学科定义

什么是律学？用数理方法探讨音程关系以及音高、音准的规定性，即有关音律的学问。

提起律学，人们的第一反应是，太抽象了，太难了。可实际上，只要我们进行音乐活动，我们就已经在跟音律相互关系的规律打交道了。比如，制造乐器，就要调整乐器的音高；演奏乐器，首先要校音；而要合唱，就要有一个共同的音高标准；不同乐器的合奏，更需要多考虑各个乐器与整个乐队的和谐关系；我们唱出的若干乐音，互相之间总是有着一定的波长比关系，关系越简单，声音就越协和，反之，就不协和。律学研究能够解释音程之间和谐的本质，音乐进行中不协和到协和或反之，张力的消长是怎样的。这内在的比例关系，我们平时虽然感觉到，却并不理解，但一旦想要知道究竟，关于音律的思考就成为一门学问。就像我们的一举一动，都受物体运动规则的约束，如果没有地心引力的作用，我们可能就要飞出地球；如果没有足够的摩擦阻力，我们可能就会走路如滑行。我们并没在意那些引力的数据或摩擦力的数据，可一旦我们想知道为什么我们不会飘到太空去，就必须了解物理学的基本道理。同样，律学（Temperament）就是研究音律制度构成与应用的科学。当我们需要了解音程之间的相互关系，以便使音乐表演更完善、音乐创作有更深层的理论支持，就必须了解律学的基本道理。

在很长一段时间里，多数人认为：我不懂律学照样可以拉琴、唱歌、作曲或评论音乐。如果有人问，音程关系的自然本性是什么？我也可以回答：能听辨不同的音程，说明我已经把握了音程的本性。当然，在自然状态下，音程关系的自然本性是可以凭听觉感性直接去把握的，所以在实践领域中没有理性认识、不



懂律学，也不妨碍音乐艺术活动的正常进行。但在音乐学这一理论领域中，律学却是不可或缺的重要基础。

多数人认为不懂律学不妨碍音乐行为，这样的想法只会使自己的音乐行为始终停留在一个自在阶段，而难以上升到自为境界。音乐学的研究若缺乏律学知识与律学方法的支持，就难免入误区而不自知。如果你认为律学是门过了时的学问，那也大错特错了。律学是为许多音乐学学科服务的科学工具，基础乐理需要它，关于音程、和弦、调式的讲解需要它；旋律学研究需要它；和声学研究需要它；世界民族音乐研究也需要它。总之，它是整个音乐学学科的基础，有了正确、扎实的律学功底，你的学术能力会得到大大提高。

律学的研究需要数学方法，而学习音乐者又多数对数学比较陌生，所以感觉很难；在律学的表述和探讨中，现有的方法也不够理想，还有待改进。所以说方法的缺点也使初学者很难入门。要解决以上问题，需要从两方面着手：一方面，在当今社会科学、自然科学大交融的时代，研究音乐学的人也需要掌握基本的数学方法；另一方面，律学研究者要改进固有的方法，以达到深入浅出的境界。我将尽量在下边的文字中用较轻松的笔调，帮你进入律学走廊，了解这门学科的发生、发展以及相关理论、知识。

## 二、研究对象、范围

说起律学研究的对象，其实就是音乐所用音律之间的音程关系。音乐中所有有关音高的方面都涉及音程关系，对音程关系进行研究就涉及律学。反过来说，律学是对音乐所用的音律从音程关系的视角进行研究。

音乐所用的音绝大多数是有确定高度的，以某些特定音程为

依据，用数学方法规定一系列乐音高度的体系就是律制（tuning system）。这个体系中每个单位称为“律”，音阶是按照音程关系的一定规格从律制中选出若干律而构成的音列，其中每个单位称为“音”，“音”与“律”合称“音律”时，除指律制外，还指在高度上作精确规定的所有乐音。<sup>①</sup>

学习音乐、研究音乐的人总免不了和音程打交道。一开始，基础乐理讲音程；研究地方民间音乐风格时，也要讲音程；从审美角度分析一个音乐作品时，甚至会细致到因为一个什么样的音程引起我们怎样的审美联想等；作曲技术理论的和声、对位、配器、织体等，也都是在讲音程组织的规则；当我们讨论旋律音程的结构与音准，调式与和声理论中的和谐原理，多声部纵向结合时的各种音程关系，转调理论，乐器制造以及调律中音准与音位的确定，重唱、重奏及合唱、合奏中的音准调节……所有这些音乐过程都涉及音程的研究。

但由于乐理知识中某些讲法的缺陷，由于工业文明的产物——十二平均律被认作世界通行的金科玉律，对于它本质上反自然规范的特点不了解，由此引起的误会，已经误导了一批批学生和学者的思维。事实上，音乐艺术所使用的音程关系的自然数理依据是基于简单的整数比关系，人为的十二平均律制则以开方所获得的无理数为依据；自从十二平均律通行以来，其价值在于能够灵活地模拟和仿制各种自然音程，但从未取代自然音程在人类审美听觉中的意义。就各种音程的自然数理依据而言，它们的结构并不是封闭僵死的，而是随着人类艺术实践的历史进步而不断开拓的。生律法品种逐步增多，生律法推衍的幅度逐渐延伸，音

---

<sup>①</sup> 赵宋光，韩宝强．律学//中国大百科全书·音乐舞蹈卷．北京：中国大百科全书出版社，1989年4月第1版，第403～407页。

乐实践所用的音系不断成长成熟，其中的规律性正有待于律学这门学科用数理方法加以揭示。十二平均律在音乐实践中的存在，并不勾销这些研究任务，而只是提供了一个简便的参照系。对十二平均律意义的误解、作用的夸大，正如同工业污染对生态的破坏一样，对音乐审美价值的自然基础的理解和对民间音乐精品的弘扬是一个极大的损害。

## 第一章

# 理论律学的方法

### 第一节 理论律学的基本概念

### 第二节 与音律相关的长度认识所经历的正反合历程

### 第三节 真数与对数两个领域里的沟通对应

⋮



律学属于声学 (Acoustics)、数学 (Mathematics) 和音乐学 (Musicology) 的交缘学科。音乐所用的音绝大多数是有确定高度 (Fixable pitch) 的, 这些声音的物理属性和律制的数理规定性, 都决定了对它们的研究必须通过物理学和数学的方法。在这基础上, 律学研究还必须结合世界各民族音乐中实际运用的音阶、调式, 研究各种律制在应用中的实际情况。

## 第一节

# 理论律学的基本概念

### 一、音程系数 (Intervallic coefficient)

#### 1. 音程系数的定义

系数是指测量某种性质或特征的数以及一般在计算中使用的因子, 音程系数当然就是指能表达音程性质的数。理论律学的一个重要任务就是要计量各种音程的大小。一定的音程对应于两个长度之间的一定的比值。例如, 八度对应于比值 2 (两长度之比为 2 : 1), 纯五度对应于比值  $\frac{3}{2}$  (两长度之比为 3 : 2)。比值可以写成分数, 当比值写成假分数时, 称之为“音程系数” (Inter-

vallic coefficient)<sup>①</sup>；写成真分数时，则称之为“音程系数的倒数”。音程系数是指任何音程关系的两音之振动周期的比值，它的大小能显示音程距离的大小。例如：

纯八度 > 纯五度 > 纯四度

$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$$

由于振动周期可以确定不移地体现音高的物理本质，采用振动周期（即时间中的绝对波长）作为表达数据，音程系数的关系式就可以表达为：

某两音之间音程关系的音程系数 =  $\frac{\text{较低音律的振动周期}}{\text{较高音律的振动周期}}$

以当代标准音  $a^1$  为例，其振动周期为  $\frac{1}{440}$  秒，比它高纯五度的音（略高于  $e^2$ ），振动周期是  $\frac{1}{660}$  秒。这是无条件的。

$$a^1 \text{ 与上方纯五度音之间音程关系的音程系数} = \frac{\frac{1}{440} \text{ 秒}}{\frac{1}{660} \text{ 秒}} = \frac{3}{2}$$

如果采用的数据为振动频率，则音程系数的关系式为：

某两音之间音程关系的音程系数 =  $\frac{\text{较大的振动频率数值}}{\text{较小的振动频率数值}}$

仍以当代标准音  $a^1$  为例，其每秒振动次数为 440 次，比它高纯五度的音，每秒振动次数为 660 次。这是无条件的。

$$a^1 \text{ 与上方纯五度音之间音程关系的音程系数} = \frac{660}{440} = \frac{3}{2}$$

这就是人们通常所说的“频率比”，但需要强调的是，这个

<sup>①</sup> 赵宋光. 理论律学的基本方法. 音乐艺术, 1984, 7; 赵宋光文集 (第二卷). 广州: 广州花城出版社, 2001 年, 第 1 版: 300—314 页.

分数数值，不仅仅表示两个振动频率数的“比”(ratio)，而且给定了“比值”(rate)，所以应该称为“频率比值”。从现象上看，“频率比值”的形式与“音程系数”的形式是一样的，读者会有疑问：为什么不用已有的术语，而一定要用一个新的语词“音程系数”呢？因为“频率比值”只指出了计算途径，而没有指出计算的目的和数值的功用。我们计算的目的是求得一个对应于特定音程、能够标志这个音程相对大小的数值，这个数值还能揭示每个音程的特定本质，所以，只有“音程系数”可以表达这个概念。

真分数和假分数两种比值形式都有资格表示某个音程的物理意义，但要显示音程的大小时，真分数就不如假分数方便。因为，两音波长度差异越大，音程也就越大，而真分数则正好相反，分子、分母差数越大，这分数的数值就越小。比如，纯八度这个音程用真分数数值表示是 $\frac{1}{2}=0.5$ ，而纯五度这个音程用真分数数值表示是 $\frac{2}{3}=0.6666$ ，这与音程越大的事实是相反的；假分数分子、分母差数越大，这个分数数值越大，与音程越大的事实是顺对应的。所以，对“音程系数”的规定是：以较大的当前项，比值 $>1$ ；而比值 $<1$ 的则称为“音程系数的倒数”。所以，音程系数可以理解为“用假分数形式表述的周期比值”。

## 2. 音程系数与谐音列的对应关系

要写出常见音程的音程系数，有简便的方法吗？有，利用谐音号数。

在基本乐理中我们都学过“泛音列”，现在把这称呼给予科学化、规范化。我们把基音和各泛音合在一起，统称“谐音”，基音与各泛音形成的音列就称为“谐音列”。再给这音列的各音



统一编号：基音编为 1 号，第一泛音编为 2 号，第二泛音编为 3 号……这些号数就能用来写出音程系数。

某两谐音相距音程的音程系数 =  $\frac{\text{较大谐音号数}}{\text{较小谐音号数}}$

例如：

1 号谐音与 2 号谐音相距纯八度，则

$$\text{纯八度的音程系数} = \frac{2}{1} = 2;$$

2 号谐音与 3 号谐音相距纯五度，则

$$\text{纯五度的音程系数} = \frac{3}{2};$$

3 号谐音与 4 号谐音相距纯四度，则

$$\text{纯四度的音程系数} = \frac{4}{3}。$$

依此类推，不难写出其余 4 个常见音程的音程系数，列表如下：

表 1.

音程名称	音程系数	音程名称	音程系数
纯八度	2		
纯五度	$\frac{3}{2}$	纯四度	$\frac{4}{3}$
纯律大三度	$\frac{5}{4}$	纯律小六度	$\frac{8}{5}$
纯律小三度	$\frac{6}{5}$	纯律大六度	$\frac{5}{3}$

观察这些数据，我们不难发现音程系数互相推算的方法：

当音程相加时，音程系数要相乘；  
 当音程相减时，音程系数要相除  
 （被减者的系数当被除数）。

例如：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯五度} + \text{纯四度} = \text{纯八度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯五度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小三度} \\ \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5} \end{array} \right.$$

由此不难发现音程转位时系数演变的规律，请观察：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯八度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小六度} \\ 2 \div \frac{5}{4} = \frac{8}{5} \end{array} \right.$$

可发现的规律是：

音程转位时，  
系数颠倒乘2。

用这些方法，我们就能由已知的音程系数推算出未知的音程系数。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯五度} - \text{纯四度} = \text{大全音} \\ \frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \end{array} \right.$$

大全音转位，是较小的小七度：

$$\frac{9}{8} \text{ 颠倒乘 } 2: \frac{8}{9} \times 2 = \frac{16}{9}$$

这样的小七度，也就是两个纯四度相加所得的：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯四度} + \text{纯四度} = \text{较小的小七度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \end{array} \right.$$

与此对比：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯四度} - \text{纯律小三度} = \text{小全音} \\ \frac{4}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{10}{9} \end{array} \right.$$

小全音转位，是较大的小七度：

$$\frac{10}{9} \text{ 颠倒乘 } 2: \frac{9}{10} \times 2 = \frac{9}{5}$$

这样的小七度，也就是纯五度加纯律小三度所得的：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯五度} + \text{纯律小三度} = \text{较大的小七度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \end{array} \right.$$

进而追问：大全音和小全音的差额是什么呢？

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大全音} - \text{小全音} = \text{普通音差} \\ \frac{9}{8} \div \frac{10}{9} = \frac{81}{80} \end{array} \right.$$

那么，半音的音程系数，也能算出吗？

由以上数据，能算出三种不同的半音：自然半音、同功能变化半音、反功能变化半音。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯四度} - \text{纯律大三度} = \text{自然半音} \\ \frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{纯律大三度} - \text{纯律小三度} = \text{同功能变化半音} \\ \frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大全音} - \text{自然半音} = \text{反功能变化半音} \\ \frac{9}{8} \div \frac{16}{15} = \frac{135}{128} \end{array} \right.$$

有了音程系数这个概念，对于不同民族所使用的特殊调式结构就可以有一个非常逻辑化的本质剖析，不会只停留在现象描述上。

## 二、音程值 (Intervallic value)

### 1. 音程值的定义

在关于音程的知识中，存在着现象和本质这一对矛盾。涉及音程本质的真数 (real number) 是音程系数，也就是说，当说到纯八度这个音程时，它的音程系数是 2，所揭示的物理本质是有效长度为 2 : 1 这样的比例关系。但仅仅知道这个本质，却仍然不方便表述对音程现象的心理感觉。所以，要切实、准确地懂得音程，就必须同时拥有把握音程的本质和现象的能力。而描述音程现象的层面属于对数领域，就是音程值。

在比较两个近似音程的大小时，必须通过乘除计算，而两个音程相加减，也必须作乘除运算；音程被扩大到多少倍或被划分为多少等分，则要进行乘方或开方运算。随着数学的发展，19 世纪开始将对数概念用于音程计量，建立了“音程值”概念。音程值是音程系数的对数，它能够描述音程现象，就是通常说的音分数和全音数。音程值之间可以用加减法互相推算，把人类感觉器官对于客观量的主观感受明白直接地表述出来，把复杂的计算简化。只有建立了真数→对数这一对概念，才能准确掌握任何音程的本质，并能轻松描绘音程的现象。只知真数（在古代中国以“三分损益”出现）、不知对数的古老方法是不完善、不清晰的，只知对数、不谈真数的偷懒方法则是不科学的。比如，当代人通过键盘乐器，依据键盘观念获得的乐理知识，虽然直观地看到了音程关系的现象，但并不准确，而且丢失了对本质的认识。

### 2. 对数是感觉器官对量与量相互关系的客观量表达

对数在基础乐理中是习以为常的，比如，当你说纯四度是  $2\frac{1}{2}$  全音，纯五度是  $3\frac{1}{2}$  全音，用的数值就是对数。当人耳这个

接收器接收到一个声波后，经过外耳、中耳、内耳一系列听觉器官各部位的传递机制，波动的共振转化为神经脉冲；中枢神经对来自两个音波的神经脉冲进行比较时，波长比例所导致的比值真数按某种关系被以幂指数放大，只能用对数关系来表达。对数数值的性质符合人类感觉器官的本性，关于这一点，早在1860年，德国心理学家费希纳（Gustav Theodor Fechner, 1801~1887年）就出版了他不朽的著作《心理物理学原理》。在这本书中，他用一个简单的数学法则概括了主观感觉和刺激源之间的联系：当刺激以乘法增加时，感觉量以加法增加。例如，当声音强度倍增时，它的响度增加一个刻度单位，数学家称此为对数关系。费希纳法则将这二者的关系表述为感觉量以刺激量的对数增加。他经过许多实验与推导，得出感觉与刺激的对数公式：

$$S = K \log R$$

式中  $S$  为感觉量差值， $R$  为刺激量比值， $K$  为常数。<sup>①</sup>

各种感觉器官对客观量加以比较时，总是会把相等的比例关系感觉为是相同的差数，这就是对数尺度的本质。一旦把客观量相互量度所得到的真数转换成它的对数，就可以把主观感受的相互关系明白直接地表述出来，因而也会把复杂的计算简化了。原来需要乘除，现在就可以直接相加减，结果与我们对听觉感受的思考是直接吻合的。

那么，什么是对数呢？这要从以10为底的幂讲起。先来回忆一下我们已有的知识：

$$10^3 = 1000$$

$$10^2 = 100$$

$$10^1 = 10$$

---

① THOMAS D. ROSSING, *The Science of Sound*. 第70页。

$$10^0 = 1$$

$$10^{-1} = 0.1$$

$$10^{-2} = 0.01$$

这里，用小号字写在幂右上角的，是指数。指数跟对数有什么关系呢？只要把指数摘下来，写成普通字号的数字，就成对数了。

例如：

$$\begin{array}{lcl} 10^2 & = & 100 \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \log_{10} 100 & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{读作：10 底的 2 次幂等于 100。} \\ \text{读作：在以 10 为底的条件下，} \\ \text{100 的对数等于 2。} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 10^1 & = & 10 \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \log_{10} 10 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{读作：10 底的 1 次幂等于 10。} \\ \text{读作：在以 10 为底的条件下，10} \\ \text{的对数等于 1。} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 10^0 & = & 1 \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \log_{10} 1 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{读作：10 底的零次幂等于 1。} \\ \text{读作：在以 10 为底的条件下，} \\ \text{1 的对数等于零。} \end{array}$$

在上述三组关系式里，每组的第二行里，等号前有符号“log”，它的意义是“求对数”；它的右下角用小号字写出的数字，这数字表明“在什么条件下”，此处都是小号数字“10”，都表明“在以 10 为底的条件下”；之后，在等号之左紧挨着的数，称为“真数”（来自上行等式的等号后，那就是“幂的值”）；最后，在等号之右的数，称为“对数”，那就是上行等式里等号前幂右上角的指数摘下来转化成的。

观察对数跟真数的对应关系，不难发现：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在对数轨道上：} 1 + 1 = 2 \\ \text{在真数轨道上：} 10 \times 10 = 100 \end{array} \right.$$

{ 在对数轨道上:  $1 - 1 = 0$   
 { 在真数轨道上:  $10 \div 10 = 1$

概括地说:

当真数相乘时, 相应对数要相加;  
 当真数相除时, 相应对数要相减,  
 被除数的对数当被减数。

设问:

问: 既然我们知道纯八度的音程系数是 2, 能不能把 2 认作真数来求对数呢?

答: 求对数要讲条件。刚才我们都“在以 10 为底的条件下”求对数, 现在我们仍在同一条件下求对数, 在这条件下求得的对数称为“常用对数”。

问: 2 的常用对数是什么数值呢?

答: 你我都不具备算出这一数值的数学技巧。近代的数学家们已经制成“常用对数表”, 你我只需查表, 就能查到每个数的常用对数。查到 2 的常用对数是 0.30103。请看对应关系:

表 2.

真数	常用对数
10	1
2	0.30103
1	0

以查表所得的数值为依据, 我们能写出关系式:

$$\log_{10} 2 = 0.30103$$

按照数学上的约定和习惯, 简写成:

$$\lg 2 = 0.30103$$

虽然查到了对数数值, 但我们对这数值颇感不满: 太小了,

难道叫我们把一个纯八度的音程值说成 0.30103 个什么样的单位？太小，那就放大吧！但放大时必须遵守“按比例放大”的规则，也就是说，对应于每个音程系数在常用对数表上查到的对数数值必须乘以同一个数（它被称为“比例常数”）来放大，否则，所得的数值就没有科学价值可言了。

放大到多少倍呢？所选择的“比例常数”是什么数值呢？在近代历史上，曾出现四种不同的方案，下文稍后将回顾这段历史。暂时，我们把注意力集中在跟基础乐理观念关系最直接、最密切的方案。在基础乐理领域里，早已习惯说“全音”、“半音”，借用十二平均律为参照系，一个纯八度可分成 12 个“半音”，或者说，等于 6 个全音。为了适应这习惯，我们就把那个太小的 0.30103 放大成 6。不难写出关系式：

$$\lg 2 \times \frac{6}{\lg 2} = 6$$

由此推广到代数公式，可写出：

$$\underbrace{\lg (\text{任何音程系数})}_{\text{可以查表得到}} \times \frac{6}{\lg 2} = \text{相应的全音数}$$

$$\text{即 } \frac{6}{0.30103} \times \lg (\text{任何音程系数}) = \text{相应的全音数}$$

可得：

$\begin{aligned} &\text{与某音程系数相对应的全音数} \\ &= 19.9315686 \times \underbrace{\lg (\text{任何音程系数})}_{\text{可查表得到}} \end{aligned}$
---

例如，若想知道纯五度的音程值是多少个全音，我们就用纯五度的音程系数  $\frac{3}{2}$  ( $=1.5$ ) 代入上面的公式：



与 1.5 相对应的全音数

$$= \lg 1.5 \quad \times 19.9315686$$

$$= 0.176091259 \times 19.9315686$$

$$= 3.5097750097 \approx 3.51$$

从音程系数推算音程值，即从真数推算对数，可以说是律学研究中最高深繁难的计算了，但在电子计算器已普及到百姓家的当代，这样的计算也不可怕了。不仅如此，需用这种推算的场合实际上并不多，我们只要推算出基本的音程值数据（例如纯五度与纯律大三度两个音程值全音数），传统律学用得着的其余各项音程值数据都可由它们和纯八度全音数（=6）相减或相加算出。超越传统律学范围而进入新领域时，每个新领域只需增添一个基本音程值数据，就又能顺利推算了。

有了音程值数据，我们就能用数值来确切地表示音高与音高的距离，正好比我们能用公里数来表示城市与城市的距离。

### 3. 曾经有过的不同音程值单位

下文回顾历史，介绍四种音程值单位的由来。<sup>①</sup>

（1）瑞士人欧拉（Léonhard Euler，1707～1783 年）创用，德国人里曼（Hugo Riemann，1849～1919 年）等人所沿用的方案，把 2 的常用对数放大到 1000，所有各音程系数的常用对数都按此比例放大。比例式可以写作：

$$\frac{\text{与某音程系数相对应的密优数}}{\lg(\text{某音程系数})} = \frac{1000}{\lg 2}$$

这样的音程值单位就称为“μ”（这希腊字母读作“密优”）。换句话说，一个“密优”的大小就是纯八度的千分之一。

<sup>①</sup> 赵宋光，一笔恼人遗产的松快清理，音乐研究：1993，3：57—68。

与某音程系数相对应的密优数

$$= \frac{1000}{0.30103} \times \lg (\text{某音程系数})$$

(2) 法国人萨瓦尔 (Félix Savart, 1791~1841 年) 创用的方案, 把音程系数的常用对数扩大到 1000 倍 (把小数点右移三位), 用作音程值的数值。比例式可以写作:

$$\frac{\text{与某音程系数相对应的萨瓦尔数}}{\lg (\text{某音程系数})} = 1000$$

这样的音程值单位就称为“萨瓦尔”。换句话说, 一个“萨瓦尔”的大小就是谐音列中从基音到第 10 号谐音这个宽音程 (三个八度加纯律大三度) 的千分之一。

与某音程系数相对应的萨瓦尔数

$$= 1000 \times \lg (\text{某音程系数})$$

(3) 英国人埃利斯 (Alexander Ellis, 1814~1890 年) 创用的方案, 把 2 的常用对数放大到 1200, 所有各音程系数的常用对数都按此比例放大。比例式可以写作:

$$\frac{\text{与某音程系数相对应的音分数}}{\lg (\text{某音程系数})} = \frac{1200}{\lg 2}$$

这样的音程值单位就称为“cent”, 汉译作“音分”。换句话说, 一个“音分”的大小就是纯八度的  $\frac{1}{1200}$ , 即平均律半音的  $\frac{1}{100}$ 。

与某音程系数相对应的音分数

$$= \frac{1200}{0.30103} \times \lg (\text{某音程系数})$$

(4) 日本人田边尚雄 (1883~1984 年) 创用的方案, 把 2 的常用对数放大到 6, 所有各音程系数的常用对数都按此比例放

大。比例式可以写作：

$$\frac{\text{与某音程系数相对应的全音数}}{\lg(\text{某音程系数})} = \frac{6}{\lg 2}$$

这样的音程值单位就称为“平均律全音”，简称“全音”。众所周知，一个“全音”的大小就是纯八度的 $\frac{1}{6}$ （换算公式见下文）。

只有在这个方案中，表示音程值的数才与基础乐理中的半音、全音、三全音等概念所用的数相吻合。可见，这是最优的方案，使用全音数以表示音程值的计量制是最简明、最便利的。

如果用“全音数”单位将上述四种单位加以比较的话，那么，其余三种计量制的数值折合成全音数时所用的换算公式如下：

$$1 \text{ 萨瓦尔} = \frac{600}{30103} \text{ 全音} = 0.0199315683 \text{ 全音}$$

$$1 \text{ 密 伏} = \frac{6}{1000} \text{ 全音} = 0.006 \text{ 全音}$$

$$1 \text{ 音 分} = \frac{6}{1200} \text{ 全音} = 0.005 \text{ 全音}$$

可能有许多学者更熟悉音分数<sup>①</sup>，若要把全音数折合成音分数，可用如下公式：

$$1 \text{ 全音} = \frac{1200}{6} \text{ 音分} = 200 \text{ 音分}$$

① 在目前通常的表述中所用的“音分值”是个缺少推敲的概念，埃利斯所设计的计量体系是将一个半音计数为100音分。“值”表达的是事物本质的确定涵义，对应英文的“value”；在这里，音程值有不同的计数单位，每种单位对同一个音程的“value”有不同的数量描述。所以，准确地说是“音分数”，意为“cent count”。

只须取全音数乘以 200，就得到音分数了。

尽管“萨瓦尔”和“密优”不是常用的计量单位，但为了阅读西方律学文献可能遇到的“拦路虎”，这里也列出换算公式：

$$1 \text{ 全音} = \frac{1000}{6} \text{ 密优} = 166.6666667 \text{ 密优}$$

$$1 \text{ 全音} = \frac{1000 \lg 2}{6} \text{ 萨瓦尔} = \frac{301.03}{6} = 50.17166667 \text{ 萨瓦尔}$$

把上文加以总结，我们能建立这样的概念：每一个音程系数（作为真数）都有某个音程值全音数（作为对数）跟它对应；真数与对数双轨并行，可进行双轨推算；在真数轨道上作乘除推算时，在对数轨道上作加减推算。

表 3. 基本数据

音程值全音数	3.51	1.93
音程名称	纯五度	纯律大三度
音程系数	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$

推算举例：现在要求把纯律大三度、五度相生大三度、和声小调内的减四度这三个音程进行比较。

纯律大三度的音程系数与音程值全音数，见上列基本数据表。

五度相生大三度的推算方法是 4 个纯五度减去 2 个纯八度：

$$\begin{cases} 3.51 + 3.51 + 3.51 + 3.51 - 6 - 6 = 2.04 \\ \text{纯五度} + \text{纯五度} + \text{纯五度} + \text{纯五度} - \text{纯八度} - \text{纯八度} = \text{五度相生大三度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \div 2 \div 2 = \frac{81}{64} \end{cases}$$

和声小调内的减四度由纯律小三度加自然半音而得，由此追问：纯律小三度的推算途径如何？自然半音的推算途径如何？

$$\begin{cases}
 3.51 - 1.93 = 1.58 \\
 \text{纯五度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小三度} \\
 \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 (6 - 3.51) - 1.93 = 0.56 \\
 \text{纯八度} - \text{纯五度} - \text{纯律大三度} = \text{自然半音} \\
 2 \div \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 1.58 + 0.56 = 2.14 \\
 \text{纯律小三度} + \text{自然半音} = \text{和声小调内的减四度} \\
 \frac{6}{5} \times \frac{16}{15} = \frac{32}{25}
 \end{cases}$$

三者相比较，可列成如下表格：

表 4.

音程值全音数	1.93	2.04	2.14
音程名称	纯律大三度	五度相生大三度	和声小调内的减四度
音程系数	$\frac{5}{4}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{32}{25}$

### 三、相对波长 (Relative wavelength)<sup>①</sup> 与相对音高 (Relative pitch height)

描述音高的真数→对数的对应概念为：相对波长→相对音高。相对波长的数值，既可<1，也可>1；与之对应，相对音高的数值，既可>0，也可<0。这样的描述方式可以比作：某城市的位置在坐标中心之北或之南若干里。

① “相对波长”这个概念最早见于赵宋光撰写的《中华律学传统的复兴与开拓》一文中，发表于《中国音乐学》1986年第3期，后来在另一篇长文《一笔恼人遗产的松快清理》中他详细阐述这个术语，该文发表于《音乐研究》1993年第3期。

## 1. 相对波长概念的由来

声音的波长虽然看不见，但我们可以想象出，长的波对应于低的音，短的波对应于高的音。“波长”有空间和时间两个视角，从空间视角看，波长与传播速度相关。声波在空气中或在铁轨中的传播速度是不一样的，所以，对于同一个音律而言，我们找不到确定不变的绝对波长数值。从时间视角看，一定的音高（音律）就对应于一定的绝对波长数值，也就是说：

时间中的绝对波长 = 振动周期

对于一定的音高而言，振动周期的数值是确定不变的，所以可以把振动周期理解为“时间中的绝对波长”。

有了绝对波长，相对波长就可以很容易算出来。一系列音的绝对波长同时除以作为基准那音的绝对波长，就得到各自的相对波长了。即，两个音的绝对波长之商为“相对波长”：

某音律的相对波长 =  $\frac{\text{该音律在时间中的绝对波长}}{\text{作为基准的音在时间中的绝对波长}}$

谱例 1.

校正值<sup>①</sup>：



振动周期（秒）： $\frac{1}{220} : \frac{1}{330} : \frac{1}{440} : \frac{1}{550} : \frac{1}{660}$

设以  $a^1$  为基准算出的相对波长： $2 : \frac{4}{3} : 1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

设哪个音律为基准，是自由的，取决于我们研究工作的需要。此处姑且设标准音  $a^1$  为基准，在这条件下，各音律的相对波长数值如何计算得到呢？各音律的振动周期全都除以基准音律

<sup>①</sup> 校正值的由来是用十二平均律作为框架尺度，来衡量自然音程的大小所得到的微差。平均律音程通过校正就能转化为不同的自然音程。

的振动周期 $\frac{1}{440}$ 秒。

$$e^2 (+.01) \text{ 的相对波长} = \frac{\frac{1}{660} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = \frac{2}{3}$$

$$\sharp c^2 (-.07) \text{ 的相对波长} = \frac{\frac{1}{550} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = \frac{4}{5}$$

$$a^1 \text{ 的相对波长} = \frac{\frac{1}{440} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = 1$$

$$e^1 (+.01) \text{ 的相对波长} = \frac{\frac{1}{330} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = \frac{4}{3}$$

$$a \text{ 的相对波长} = \frac{\frac{1}{220} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = 2$$

由上列 5 个实例可以看出，相对波长数值能让我们一目了然地看出所研究音律的波长相互关系。凡基准音律本身，相对波长必=1；凡高于基准的音律，相对波长必<1；凡低于基准的音律，相对波长必>1。

## 2. 相对音高

相对音高是相对波长的对数，即音高用正负全音数表达。将基准音的相对音高数值认作纵标尺上的 0，比基准低的音，相对音高必为负值；反之，比基准高的音，相对音高为正值。正负号右边的绝对数值总是等于该音距离基准的音程值，所以前边的双轨推算结果可以直接取过来。

相对音高与相对波长之间的对应关系，有如下规律：

表 5.

相对音高	对数	负值<0	0	正值>0
相对波长	真数	假分数>1	1	真分数<1

读者在此遇到的困惑是：两者之间存在着逆反的对应关系，真数越大，对数反倒越小了，这么对应是如何可能的呢？用什么样的公式来计算，才有可能从相对波长数值推算出这样的相对音高数值呢？

在此有必要作一扼要说明。换算公式是：

$$\log_{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} (\text{相对波长}) = \text{相对音高全音数}$$

读作：在以 $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ 为底的条件下，相对波长（作为真数）的对数等于相对音高全音数（作为对数）。该公式的具体运用，须借助“换底公式”，下文会举例说明。

相对波长与相对音高这对概念可以使学习者、研究者一目了然地比较出不同律制的差异，对各民族的律律情况可以有一个从本质到现象的细微描述。

**四、跃迁算子 (Transition operator) 与 跃程值 (Transitional intervallic value)**

#### 1. 基本定义

有了上述概念，我们还可以建立“跃迁算子”和“跃程值”概念。这是描述音高变化的真数→对数的对应概念：跃迁算子→跃程值，可以比作城市间交通的行程。因为当两个音先后相继时，就音波本身而言，就是从某一波长到另一波长的跳跃性迁



移，这就是音波波长的跃迁<sup>①</sup>，用数学方法表述，即写成一个“跃迁算子”<sup>②</sup>，形式为“ $\times$ 乘数”（这乘数或为音程系数，或为音程系数的倒数）。

上行旋律音程的波长跃迁变化表现为：

先有（较低者）波长 $\times$ 音程系数的倒数=后继（较高者）  
波长

下行旋律音程的波长跃迁变化表现为：

先有（较高者）波长 $\times$ 音程系数=后继（较低者）波长

跃程值：有助于表述旋律上行、下行时的幅度。上行旋律音程表述为“+ 音程值全音数”；下行旋律音程表述为“- 音程值全音数”。

这对概念不仅可以描述旋律音程的跌宕变化，还可以分析貌似音程的细微变化和同律位乐音自身的变化。

## 2. 生律法是运用跃迁算子与跃程值作为操作模式的实例

要从已有的某律生出比它高一定音程的另一律，就应规定一定比率，从已知的长度推算出短于它的另一长度，生律规则表

① “跃迁”一词是从量子力学借用过来的术语，由赵宋光先生于1982年提出，可以指振动状态由某一波长突然改变为另一波长，不经过中间状态，不插入过渡阶段。跃迁反映在旋律形态上就是旋律音程，或为上行或为下行。旋律上行时，跃迁算子内的乘数小于1；旋律下行时，跃迁算子内的乘数大于1。“跃迁算子”概念用于不同的生律法。“跃迁算子”跃迁所跨越的音程可能很小，这样的跃迁是隐形的，难以觉察的；所含的乘数可能是一个相当复杂的比值，实际上体现了不同律制间的转换，甚至进入了前所未有的律制领域。

② “跃迁算子”作为术语表达形式的完善和正式提出是在2001年春天，在广东省艺术中专讲座讲义《借助数理为音乐回归自然辨明航向》中，而在这之前，就已被允许正式用于笔者的博士论文《“中立音”音律现象》一文中（2000年）。

述为：

跃程值： + 音程值

跃迁算子：  $\times \frac{1}{\text{音程系数}}$

例如“三分损一”：

$$\left\{ \begin{array}{lll} 0 & +3.51 & =3.51 \\ \text{黄钟} & \text{三分损一} & \text{生林钟} \\ 81 & \times \frac{2}{3} \text{ (纯五度的音程系数的倒数)} & =54 \end{array} \right.$$

要从已有的某律生出比它低一定音程的另一律，就应规定一定的比率，从已知的长度推算出长于它的另一长度，生律规则表述为：

跃程值： - 音程值

跃迁算子：  $\times$  音程系数

例如，“三分益一”：

$$\left\{ \begin{array}{lll} 3.51 & -2.49 & =1.02 \\ \text{林钟} & \text{三分益一} & \text{生太簇} \\ 54 & \times \frac{4}{3} \text{ (纯四度的音程系数)} & =72 \end{array} \right.$$

在上述两例内，律数=相对波长 $\times 81$ 。《管子》一书中之所以设定出发点“宫”的律数为81(=3 $\times$ 3 $\times$ 3 $\times$ 3)，是为了使生律的结果“五音”(宫、徵、商、羽、角)的律数都是整数。此处对“三分损益”的运用次序先后，与《管子》中所述有所不同，而适应《吕氏春秋》、《淮南子》的有关记述。

## 第二节

# 与音律相关的长度认识所经历的正反合历程

在计量音程大小方面，历史上曾经历了不同的认识阶段。

### 一、长度比值(Length rate)：古代各种文化用长度表述音律

古人早已发现了物体振动发音的基本规律，那就是宏、大、粗、长的振动体对应低的声音，而微、小、细、短的振动体则对应高的声音。古人通过发音体（管、弦）的长度比例关系来理解并计算音程，这个比例可以用整数比的形式来表示。比如：相距纯五度的两个音的发音体，较低者的长度：较高者的长度=3：2，或写成假分数的形式为 $\frac{3}{2}$ ；相距纯四度时，其长度比为4：3，比值为 $\frac{4}{3}$ ；相距纯正协和的大三度时，其长度比是5：4，比值为 $\frac{5}{4}$ 。

#### 1. 中国的律数

在中国，这种对音律规律的认识被记载在历代相关典籍中，即古代律学文献中的“律数”。例如：

《管子·地员篇》（约成书于公元前4世纪，管子本人的生活年代约为公元前730年～前645年）最早记录了五音与律数的关系：

阶名：	徵	羽	宫	商	角
律数：	108	96	81	72	64
相对弦长：	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{27}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$

这个律数数列是以三分损益之法<sup>①</sup>得出的五个音的有效长度，根据这个数列，可以求出它们之间的相对弦长关系；此后，历代乐律文献的记载，仍是以三分损益法为主，在解决“旋相为宫”的目标追求下，律位不断增加，呈现出更多的长度比变化。

## 2. 古希腊一弦器所反映的弦长比传统

古希腊哲学家兼数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前582—前493年）在研究音律变化的规律时，以有一个可移动码子的独弦器（monochord 原意为“单弦”）作为校音工具，对律学进行研究。这表明他不仅发现了音律的变化规律，而且以实践为根据对音律理论进行长度表述。

## 3. 阿拉伯乌德所反映的弦长比传统

阿拉伯人的律学研究一直围绕着对拨弦乐器乌德（Ud）指位系统的改造而展开。指位的变化改变了弦长而引起音高的变化，人们从实践经验中早就掌握了其中的变化规律，并早在九世纪时，就已经能够对中指指位给出确切的弦长比值。

## 4. 印度“斯鲁蒂”表述系统所反映出的弦长认识方法

印度人是发明弦乐器的天才，早在公元前就出现的琉特类乐器和公元后出现的板式、棒式齐特尔类琴，为认识和掌握弦长比变化规律做好了物质准备。印度人把他们对相对弦长之间差额的观察经验表述为含若干个“斯鲁蒂”。

---

<sup>①</sup> 记载于史籍的生律法，不仅是权威的律学生律法，而且对中国古代乐学理论有着深刻影响。

上述几种文化中的律学研究都是与对长度的观察、测量和比较联系起来的。虽然这时对长度的思考还局限于物质材料（弦长或管长）的粗略条件，但表达的结果与现实经验是一致的，即前边提到的宏—细顺对应的关系。

## 二、频率比值(Frequency rate): 近现代律学研究方法的变化

到了近代，由于物理学的发展，人们认识到从单位时间内的振动频率出发，可以更精密地研究音高，音程关系也就通过频率比来理解和计算了。同样是相距纯五度的两个音，较高者的频率：较低者的频率 $=3:2=\frac{3}{2}$ 。虽然这个比率数值与长度比的比率数值是相同的，但数字所代表的两音高低却是与古代相反的。

近代物理学对空气振动频率比的宏观实验操作与计算表现出了与现实经验相反的对应：较低的音对应于较小的频率数，较高的音对应于较大的频率数。这个实验结果无疑是正确的，但这个结果却与实际经验相互颠倒，其原因在于：频率是取单位时间的长度（秒）除以每次振动所占时间的长度（振动周期）所得的商，商与除数两者处于反比例，因而带来了对于音律的数值表述上的理论与实践的矛盾。

这个矛盾首先不是一个事关对与错的性质的矛盾，我们不必怀疑实验室测量出来的数据结果；但也不会因为科学实验室中的实验结果而否定我们原本从生活实践中观察到的经验。所以，对这个矛盾，我们不能简单地废弃此或彼，而应该寻找新方法来解决这个矛盾。

其实，用长度表述还是用频率表述，这两者之间是有共性的。一个音程对应的两个数所构成的比值，其结果总是两个：大于1或小于1，如前边所说的，假分数或真分数。

以纯五度为例，比较几种不同的表述方法：

### 1. 以振动频率数来描述

以当代标准音  $a^1$  为例，每秒振动次数为 440 次，比它高纯五度的音，每秒振动次数为 660 次，这是无条件的。

$a^1$  与上方纯五度音之间音程关系的音程系数  $= \frac{660}{440} = \frac{3}{2}$ ，这是一个大于 1 的假分数。

### 2. 以有效弦长来描述

设一根弦的基音为 1，那么该弦上方纯五度的音就是：

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

这就是沿用了数千年的“三分损益法”，得出的结论是小于 1 的真分数。

所以，在真数领域里，它们之间只是互为倒数。

## 三、周期比值 (Vibration period rate)：现代物理学为律学思维带来质的飞跃

随着现代物理学的发展，对发音体的振动状态也进入了微观思考。频率是指发音体“振动 1 秒钟”的振动数目，而我们在音乐的辨听中，从不需要对一个音不多不少正好听 1 秒钟。对于人的听觉分辨而言，真正与一定音高的音律无条件地联系在一起的物理学规定性是振动周期。只有使用振动周期，才是真正进入到对音波振动状态的微观量度的把握。因而，从对频率的关注转入到对周期的细微把握，就是历史的必然。例如，振动频率为每秒 440 次，振动周期就是每次  $\frac{1}{440}$  秒，即时间中的波长。这就有了第三种表述方法。

### 1. 以相对波长来描述

有了绝对波长，就不难求出相对波长：两个音的绝对波长之商为“相对波长”。

某音律的相对波长 =  $\frac{\text{该音律在时间中的绝对波长}}{\text{作为基准的音在时间中的绝对波长}}$

$a^1$  音的绝对波长为  $\frac{1}{440}$ ，上方纯五度  $e^2$  音的绝对波长为  $\frac{1}{660}$ ，则

$$e^2 \text{ 音的相对波长} = \frac{\frac{1}{660} \text{ 秒}}{\frac{1}{440} \text{ 秒}} = \frac{2}{3}$$

很显然，相对波长之间的比例关系和古代律数长度的比例关系是一致的。

在经历了从古代对弦长、气柱长等的长度比表述，到近代物理学对频率比的宏观实验操作与计算，继而发展到对音波的振动周期比的微观量度表述——这样一个正反合的认识历程，真数领域的表达就又能够回到低者较长、高者较短的顺对应关系，这不仅与我们的经验相吻合，而且是真正的本质表述。从器物转向音波本身的方法，既回到长度，又超越了器物，这也是这个时代所应有的超越。

古人早已抓住了音程的本质，但对本质把握的手段、途径的运用却有一个漫长的历史发展过程：古代是对器物的相对长度（律数）经验性认识，现代是对音波的相对长度科学量化认识。前面所说的长度比、频率比、周期比诸概念的依次递变，经历了认识上的由粗略到精细、由经验到本质把握的过程。

总而言之，从长度比到频率比的认识过程非常缓慢，而现代律学从现代物理学中得到的营养，则是敏捷地反思对音波的宏观

实验通过频率的把握，而迅速转入到微观量度通过周期的把握。

## 2. 谐音列与周期比的对应

任何一个乐音所包含的谐音列，无论具体频率数值是怎样的，我们都可以用一系列振动周期导出的相对数值来表示其物理量，它们的规律性是确定不变的，代入上列公式计算便可揭示出来。

谱例2.

谐音号： 1            2            3            4            5            6... ♯

周期比： 1    :     $\frac{1}{2}$     :     $\frac{1}{3}$     :     $\frac{1}{4}$     :     $\frac{1}{5}$     :     $\frac{1}{6}$  ...  $\frac{1}{n}$

运用相对波长的两个重要意义在于：第一，超越了各具体物质材料发音条件中有多种因素的牵连，振动方式也不同的局限，无论弦振动、体振动、膜振动、气柱振动等等，全部转入对音波波长的微观量度把握；第二，相对波长突破了相对弦长只适用于一条弦的局限性，并且贯通古今中外所有的音程知识和使用长度单位的传统（相对长度在中国古代以“律数”出现，而在古印度、古希腊、古阿拉伯则用“相对弦长”）。

## 第三节

# 真数与对数两个领域里的沟通对应

在律学研究中，上述办法，即以振动周期的表达使真数领域内的颠倒得到回归。但还有另一对矛盾需要理清，即第一节表 5



所列出的对应关系：真数领域里（以振动周期或相对波长为例）低大高小和对数领域里（以用音分数表述相对音高为例）低小高大。这两者能否沟通，如何对应？

我们必须冷静地看到，我们面对音波振动而听到不同的音高时，事实的两个方面在人类的认知结构中呈现为“互相颠倒”的两个要素：我们的听觉把音的高度想象成一个纵向的标尺。比基准高者为正数，音越高数值越大，比基准低者为负数，音越低其数值越小（这是认知结构的感性要素）；同时，我们的认知结构又必须确认，越是高的音，音源振动体越小，波长越短，越是低的音，音源振动体越大，波长越长（这是认知结构的理性要素）。这两个要素呈现为两种不同的维度，可以“埃菲尔铁塔”的形象来比喻两种不同的维度：纵向维度描述塔身高度，位置越高，高度的数值越大；横向维度描述塔身的宽度广度，基座很宽很广，越往上伸就越收越窄了。人类对音波音高认知结构中这两种维度的“大小颠倒”来自物理与心理的实际状况，是不可消除的，只有清醒地确认才可能达到正确的理解。另一方面，近代声学习惯用频率概念，却把音波本身存在的状态作了“大小颠倒”的把握：音低数小，音高数大。其结果，就把人类认知结构中两种维度之间的“大小颠倒”抹掉了，遮蔽了，掩盖了。许多物理学家认为，在音高的标尺上“低小高大”跟用频率描述的“低小高大”，两者顺对应是十分自然合理的，两者以对数与真数的关系互相对应也是数理的必然，是别无选择的表述方式。但在这里我们要郑重地指出：用这种方式来抹掉、遮蔽、掩盖人类认知结构中两个层面一维度天然固有的相互关系，已经导致了对人类认知结构的误解，在律学学科的概念体系中埋伏了违反事实的扭曲。

现在要提出的问题是：真数领域里（振动周期或相对波长）的低大高小，跟对数领域里（相对音高）的低小高大，两者的对

应关系如何才可以以科学的语言建立起来？是否可利用数学的关系式来表述呢？

针对这个问题，我们也能找到解决方案，并作数学说明。

真数的数值可以很容易地换算成对数数值。用算理公式，我们可以根据音程的数值算出音高。

### 一、用不同文化圈所用的音程值单位来表述从相对波长到相对音高的推算过程

1. 用“音分 (cent)”作音程值单位名称

算理公式为： $\log_{\sqrt[1200]{\frac{1}{2}}}$  [相对波长 (N)]

算理公式利用换底公式进行推导，可以得到实用公式。

根据换底公式： $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ ，求实用公式：

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt[1200]{\frac{1}{2}}}(N) \\ &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} \sqrt[1200]{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 2^{(-1) \times \frac{1}{1200}}} \\ &= \frac{\log_{10} N}{(-1) \times \frac{1}{1200} \log_{10} 2} \\ &= \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg N \end{aligned}$$

即：相对音高 =  $\frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg N$

2. 用“密优 ( $\mu$ )”作音程值单位名称

算理公式为： $\log_{\sqrt[1000]{\frac{1}{2}}}$  [相对波长 (N)]

省略换底步骤，实用公式为：

$$\begin{aligned}
 & \log_{\sqrt[1000]{\frac{1}{2}}}(N) \\
 &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} \sqrt[1000]{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 2^{(-1) \times \frac{1}{1000}}} \\
 &= \frac{\log_{10} N}{(-1) \times \frac{1}{1000} \log_{10} 2} \\
 &= \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg N
 \end{aligned}$$

$$\text{即：相对音高} = \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg N$$

3. 用“全音”作音程值单位名称

算理公式为： $\log_{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}$  [相对波长 (N)]；

省略换底步骤，实用公式为：

$$\begin{aligned}
 & \log_{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}(N) \\
 &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} \sqrt[6]{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 2^{(-1) \times \frac{1}{6}}} \\
 &= \frac{\log_{10} N}{(-1) \times \frac{1}{6} \log_{10} 2} \\
 &= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg N
 \end{aligned}$$

$$\text{即：相对音高} = \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg N$$

## 二、运算实例分析

现在将所要求的音程的相对波长分别代入上列三种实用公式

中，以纯五度相对波长 $\frac{2}{3}$ 为例代入  $N$ ：

$$\begin{aligned}
 1) \text{ 相对音高} &= \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg \frac{2}{3} = \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg(2^{+1} \cdot 3^{-1}) \\
 &= \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-1200}{\lg 2} \cdot (-\lg 3) \\
 &= -1200 + \frac{-1200}{0.30103} \cdot (-0.47712125) \\
 &= -1200 + 1901.95 = 701.95 \approx 702 \text{ (音分)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ 相对音高} &= \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg \frac{2}{3} = \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg(2^{+1} \cdot 3^{-1}) \\
 &= \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-1000}{\lg 2} \cdot (-\lg 3) \\
 &= -1000 + \frac{-1000}{0.30103} \cdot (-0.47712125) \\
 &= -1000 + 1584.96 = 584.96 \text{ (密优)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ 相对音高} &= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg \frac{2}{3} = \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg(2^{+1} \cdot 3^{-1}) \\
 &= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-6}{\lg 2} \cdot (-\lg 3) \\
 &= -6 + \frac{-6}{0.30103} \cdot (-0.47712125) \\
 &= -6 + 9.50908 = 3.50908 \approx 3.51 \text{ (全音)}
 \end{aligned}$$

以上例子是相对波长小于 1 的数，求出的对数是负值，得到正的音程值。再看一个相对波长大于 1 的数，基音下方纯五度，相对波长为 $\frac{3}{2}$ ，仅列出求全音数的实用公式：

$$\begin{aligned}
 \text{相对音高} &= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg \frac{3}{2} = \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg(2^{-1} \cdot 3^{+1}) \\
 &= \frac{-6}{\lg 2} \cdot (-\lg 2) + \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg 3 \\
 &= 6 + \frac{-6}{0.30103} \cdot (0.47712125) \\
 &= 6 - 9.509775 = -3.509775 \approx -3.51 \text{ (全音)}
 \end{aligned}$$

由此，我们得到结论：在这种公式条件下，相对波长越大，音程值越小；相对波长越小，音程值越大。

那么，在这个“颠倒”的对子中，我们还是看到了其中不变的一致性，如下表：

表 6.

对数	相对音高——绝对值	越大	越小
真数	相对波长——分数线上下相比	越悬殊	越靠拢

## 第二章

# 生律法的自然依据

### 第一节

谐音列所含的自然音程

### 第二节

各种律制概述

.....



## 第一节

# 谐音列所含的自然音程

### 一、谐音列 (Harmonic tone series) 的意义

从古代那些有着久远律学传统民族的律学理论成果来看,生律法所用的长度比例,都是一些简单整数比,这是有自然根据的。一个乐音内部存在着一个基音和一系列泛音的音程结构,这个原理虽然迟至 17 世纪才被发现<sup>①</sup>,但这个音响事实却是古已有之的,它对原始人类的和谐感早就发生了作用,从世界范围内普遍存在的古老乐器口弦、鼻笛等泛音乐器可见,人类很容易获得协和音程感的经验。几大文明古国不约而同地发现并使用泛音列最前边的几个音作为生律法依据,正说明了音响协和的普遍规律。中国古琴的徽位设置就是泛音列前段的物化显现,波及了前 8 个谐音。认识泛音列所含的种种音程是任何世代的律学研究不可离弃的根基所在。谐音列包含弦振动时的全弦振动所发出的基音 (Fundamental tone) 和各分段振动所发出的各“泛音” [Overtone, 也称“分音” (Partial tone)], 又称“分音列”。长期以来被称为“泛音列”, 也称“倍音列”。这里需要强调说明

---

<sup>①</sup> 法国音乐理论家梅尔桑 (Pater Marie Mersenne, 1588~1648 年) 从弦振动现象发现这一原理并予以表述。




“倍音列”称谓的错误及来由。“倍音”的称谓来自对频率的认识，自基音以后，各分音的频率依次为基音频率的若干倍，第几分音的频率也是基音频率的几倍，所以，建立“倍波”的概念是必要的。“倍音”来自日语，汉语若用“倍音”则无法对应于“Overtone”。至于音波的“倍”，则是指某音波振动周期的若干整数倍，可以分别称为“二倍波”、“三倍波”、“四倍波”……“十倍波”，这与日语所讲的“倍音”概念的意义截然相反。

现将诸音列及音程结构与频率比例、周期比例（振动体长度比例同此）列于下：

谱例 3.

借用记谱<sup>①</sup>



诸音号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
频率比例	1	: 2	: 3	: 4	: 5	: 6	: 7	: 8	: 9	: 10	: 11	: 12	: 13	: 14	: 15	: 16	: 17	: 18	: 19	: 20
周期比例	$\frac{1}{1}$	: $\frac{1}{2}$	: $\frac{1}{3}$	: $\frac{1}{4}$	: $\frac{1}{5}$	: $\frac{1}{6}$	: $\frac{1}{7}$	: $\frac{1}{8}$	: $\frac{1}{9}$	: $\frac{1}{10}$	: $\frac{1}{11}$	: $\frac{1}{12}$	: $\frac{1}{13}$	: $\frac{1}{14}$	: $\frac{1}{15}$	: $\frac{1}{16}$	: $\frac{1}{17}$	: $\frac{1}{18}$	: $\frac{1}{19}$	: $\frac{1}{20}$

## 二、谐音号数与各音的比例当数一致

通常在律学的教科书中总是用泛音列，但为了使各音的号数与各自的比例当数相吻合，以便于描述泛音列的构造，我们说谐音号数而不说泛音号数，即以基音为 1 号谐音，第一泛音为 2 号谐音，第二泛音为 3 号谐音，依次类推，所有自然产生的生律法所依据的音程都可以在谐音列中找到：任何生律法都要用到的八度音程，在谐音列上正是 1 号与 2 号谐音的距离；纯五度是 2 号

<sup>①</sup> 第 19 号谐音要求上行半音解决到第 20 号谐音，而不像第 17 号谐音那样下行半音解决。为表明这解决倾向，记谱应作<sup>#</sup>d<sup>3</sup>。

与 3 号谐音的距离；纯四度是 3 号与 4 号谐音的距离；纯正协和的大三度是 4 号与 5 号谐音的距离……导音到主音之间的小二度是 15 号到 16 号谐音的距离。在 16 号以前每相邻两谐音所构成的音程都被频频使用在各民族的音乐实践中，有些我们已经非常熟悉，有些还缺少理性认识。比如，古琴第十三徽按音得到相对弦长  $\frac{7}{8}$  的特大二度，其律学意义远没有被大多数人所了解并给予重视；而第 11 号、13 号谐音在音乐实践中表达情感时所具有的生动力量，也还没有作为学术公理在教科书中得到一席之地。

前面介绍的从频率比过渡到音程系数概念，促使人们意识到这比值显示着音程的本质，接着让读者进一步意识到音程系数中分子分母两个数恰恰对应于两个谐音号数，从而很容易把某两个谐音之间的音程关系（感性关系）跟用相应的谐音号数构成的音程系数（理性关系）彼此对应起来。这方法之所以准确可行，观察谱例 3 就能理解：每个谐音号数总是等于周期连比式内该项的分母数，频率比带给人的沉重负担顿时消解，在感性与理性之间，在对音程的感觉与理解之间找到一条最简捷的通道。

### 三、真数换算成对数的基本数据表

在谱例 3 中，我们已经看到谐音号数和被认作真数的质数<sup>①</sup>（Prime number）相吻合，作为理论律学，我们应该提供一些基本数据，以便使用者在换算过程中可以很容易地查出一些质数的常用对数。在第一章第一节中，我们提到了“比例常数” $\frac{6}{1g 2}$ ，现在只需要查出各个质数的常用对数，再把这些对数数值各自与

---

① 只能被其本身和 1 整除而没有余数的整数，又称素数。

比例常数相乘，就可以得到这些质数与 1 号谐音之间的音程值。

表 7. (20 以前的 7 个质数)

质数	常用对数	比例常数与常用对数相乘所得
3	$\lg 3=0.4771212547$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 3=9.5097750$
5	$\lg 5=0.6989700043$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 5=13.9315686$
7	$\lg 7=0.8450980400$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 7=16.8441296$
11	$\lg 11=1.041392685$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 11=20.7565897$
13	$\lg 13=1.113943352$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 13=22.2026383$
17	$\lg 17=1.230448921$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 17=24.5247771$
19	$\lg 19=1.278753601$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 19=25.4875651$

根据上述基本数据，把 2 至 10 这九个谐音号数都认作真数，求出相应的对数（见表 8）。

表 8.

音程距离	求对数表达式	音程值（单位：全音）
1 号与 10 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 10$	19.9315686
1 号与 9 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 9$	19.0195500
1 号与 8 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 8$	18
1 号与 7 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 7$	16.8441296
1 号与 6 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 6$	15.5097750
1 号与 5 号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 5$	13.9315686

1号与4号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 4$	12
1号与3号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 3$	9.5097750
1号与2号谐音	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 2$	6

取相邻两项相减,就得到相邻两谐音相距的全音数,由此可以编制出谐音列上前10个谐音之间的音程一览表(见表9)。

表 9.

音程名称	音程系数	音程值(全音)
小全音	$\frac{10}{9}$	$0.9120186 \approx 0.91$
大全音	$\frac{9}{8}$	$1.019500 \approx 1.02$
特大二度	$\frac{8}{7}$	$1.1558704 \approx 1.16$
特小三度	$\frac{7}{6}$	$1.3343546 \approx 1.33$
纯律小三度	$\frac{6}{5}$	$1.5782064 \approx 1.58$
纯律大三度	$\frac{5}{4}$	$1.9315686 \approx 1.93$
纯四度	$\frac{4}{3}$	$2.4902250 \approx 2.49$
纯五度	$\frac{3}{2}$	$3.5097750 \approx 3.51$
纯八度	2	6

谐音列提供了认识律学内涵的杠杆,从以往的“泛音列”转换成“谐音列”,不仅仅是一个术语的改变,更重要的是让一个信息点放射、发挥出更大的知识潜力,由此举一反三,获得一系列相互关联的理论数据。以上三个表格中的数据都是从谐音号数出发而得到的,所以这不只是一个术语的变更,而是建立系统化研究方法的基石。

## 第二节

# 各种律制概述

古人最初制造乐器，音高的调适是经过偶然发现及多次偶然经历的重复，最终获得经验，经验被归纳总结成了规律，于是乐器的发展也从最初的单管单音发展到多管多音，最后达到单管多音，弦乐器也是一弦一音至一弦多音。这种经验被记录下来，就成为最古老的有关音律研究的记载。各个民族在自然听觉的基础上，还有自己独特的文化听觉，这就有了对生律法依据的不同选择，在纯八度、纯四度、纯五度的框架内，还有若干不同的生律因素。生律法不同，也就形成了不同律制。

由于律制发展得较复杂以后，音乐上循环旋宫与自由转调的要求，推动律学必须去寻找这个可能性，于是在八度这个自然音程的框架内，运用开方的方法建立了平均律。因为这个系统除八度音程外，其他所有音程都偏离自然规范，故被称为“人工律”，而以往各种依据自然音程生律而形成的律制则统称为“自然律”。

一、五度相生律 (System of tuning in perfect fifths 或 Pythagorean intonation)

在八度关系倍半相生的前提下，以纯五度、纯四度两种音程为生律法依据，建立起一个律学体制，称为五度相生律。由于这种上五度、下四度的生律，以及相反方向的下五度、上四度生律，涉及“三分三倍”，所以，称“三分三倍生律法”能更准确

体现这个律制的特点。中国古代的“三分损益律”、古希腊按毕达哥拉斯(Pythagoras)定律法所建立的律制,中古阿拉伯人继承古希腊文明采用纯四度相生法建立的律制,都属此类。毕达哥拉斯在公元前六世纪时提出五度相生律,并认为用五度相生法可以得到音乐中所有的音,因此,在西方通常称为“毕达哥拉斯律制”,五度相生律音程也被称为“毕达哥拉斯”音程。中国古代“三分损益法”也是在差不多同时期提出,这正说明人类听觉能力的成长和对自然音律的认识是有共性的。

### 1. 含“清角”的七声音阶

如从C出发,向上五度、下四度方向生律5次,再向上四度、下五度方向生律1次就可以得到如下七声音阶(下徵调音阶,见表10)。不过,三分损益法不允许上四度下五度方向的“三倍”反生,这曾被隋代郑译斥责为“乖相生之道”。但历史悠久的古琴却一直用着“反生法”,占统治地位的理论出于僵化的观念与自然相生之道相悖,却挡不住智慧的发展。古琴作为一个“活化石”,明明白白地记录了这个依托于实践机制上的律学体制,即古琴第十徽的音律设定( $\frac{3}{4}$ ),这个徽位的设定是由“四分”而来,已经背离了“三分”的基本法。

表 10. 含“清角”的七声音阶<sup>①</sup>

校正值(全音数)		+ .02	+ .04	- .01	+ .01	+ .03	+ .05	
中国传统阶名	宫	商	角	清角	徵	羽	变宫	宫
现代音名	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>

<sup>①</sup> 赵宋光、韩宝强撰写的《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》律学条目,第405页。

相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	1.02	2.04	2.49	3.51	4.53	5.55	6
相邻两音长度比值 (即音程系数)		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值	1.02	1.02	0.45	1.02	1.02	1.02	0.45	

## 2. 含“变徵”的七声音阶

历史上,“三分损益法”不允许向下五度反生,那么按中国古代传统,从黄钟出发,用“三分损益法”向上五度下四度方向生律6次,就得到雅乐“正声”七声音阶,即含“变徵”的七声音阶(见表11)。

表 11. 含“变徵”的七声音阶

校正值(全音数)		+ .02	+ .04	+ .06	+ .01	+ .03	+ .05	
中国传统阶名	宫	商	角	变徵	徵	羽	变宫	宫
现代音名	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高 (全音数)	0	1.02	2.04	3.06	3.51	4.53	5.55	6
相邻两音长度比值 (即音程系数)		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值	1.02	1.02	1.02	0.45	1.02	1.02	0.45	

## 3. “三分损益律”十二律

从黄钟出发,生律11次,就可以得到“三分损益律半音音阶”(见表12)。

表 12. 三分损益律半音音阶

校正值(全音数)		+ .07	+ .02	+ .09	+ .04	+ .11	+ .06	+ .01	+ .08	+ .03	+ .10	+ .05	
中国古代律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	黄钟
现代音名	c <sup>1</sup>	<sup>#</sup> c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	<sup>#</sup> d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	<sup>#</sup> e <sup>1</sup>	<sup>#</sup> f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	<sup>#</sup> g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	<sup>#</sup> a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	0.57	1.02	1.59	2.04	2.61	3.06	3.51	4.08	4.53	5.10	5.55	6
相邻两音长度比值(即音程系数)		$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值		0.57	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45

从上表我们可以看到,在五度相生十二律音阶上,半音有两种:一种是小半音,长度比为  $256:243$  ( $\frac{256}{243}$ ),音程值为 0.45 全音(90 音分),现代记谱为小二度,古希腊称为“林玛”(limma),共有 7 处;另一种是大半音,长度比为  $2187:2048$  ( $\frac{2187}{2048}$ ),音程值为 0.57 全音(114 音分),现代记谱为增一度,古希腊称为“阿波托美”(apotome),共有 5 处。同样,全音也有两种:一种是大全音,长度比为  $9:8$  ( $\frac{9}{8}$ ),音程值为 1.02 全音(204 音分),现代记谱为大二度,这是五声音阶中就拥有的,即为普通大二度,也是谐音列上第 8、9 号谐音之比;另一种是小全音,即两个“林玛”半音相加,音程系数为“林玛音程系数”的平方[( $\frac{256}{243}$ )<sup>2</sup>],无射正律和黄钟半律之间、仲吕正律和林钟正律之间正是这样的距离。长度比为 ( $\frac{256}{243}$ )<sup>2</sup> = 65536 :



$59049 = 2^{16} : 3^{10}$ ，音程值为 0.9 全音（180 音分），从式中 3 的幂指数可知，第 10 次生律就能构成五度相生律小全音。

三分损益法相生 12 次得到第 13 律，长度略短（音略高）于首发律黄钟，两者的长度比是  $531441 : 524288$  ( $3^{12} : 2^{19}$ )，即音程系数为  $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ ，音程值为 0.12 全音（三分损益每相生一次有  $3.509775 - 3.5 = 0.009775$  全音  $\approx 0.01$  全音的“微小音差”，相生 12 次，累积为 0.12 个全音，约为 24 音分）。这就是所谓“周而不能复始”，引起了中国古代乐律学史上一个长久不衰的研究课题，即如何解决“仲吕上生不及黄钟”的问题。古希腊的律学研究者也发现了这个音差，称之为“毕达哥拉斯音差”，我们现在称之为“古代音差”或“最大音差”（comma maxima）。其实，大半音和小半音之间也相差一个“古代音差”，具体求解过程为：

大半音的音程系数  $\div$  小半音的音程系数

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2187}{2048} \quad \div \quad \frac{256}{243} \\
 &= \frac{3^7}{2^{11}} \quad \div \quad \frac{2^8}{3^5} \\
 &= \frac{3^{12}}{2^{19}}
 \end{aligned}$$

解决这个音差的律学研究活动先后因不同的发展方向而产生了京房六十律和钱乐之三百六十律、何承天新律和朱载堉新法密率（十二平均律）。

#### 4. “三分三倍生律”十二律

“三分三倍生律”而得的十二律在中国古代历史上是实践存在，古希腊的“毕达哥拉斯律”也是这样一种律制。在表 12 “三分损益律半音音阶”中缺少小七度和小三度，增六度“无射”和增二度“夹钟”两律是相生第十次和第九次得到的，与旋律进

行中具有下属功能性质的五度相生小七度和五度相生小三度有着本质的不同。虽然经学家们从不承认“三倍”反生这种生律法的存在,但在音乐实践中一直存在着,古籍文献中总以被批评的面貌出现的下徵音阶就是这种律制的乐学体现。这种乐、律学结合在一起的整体性思维是必不可少的。现在用双轨推算的方法演示出这两种音程的形成路径。

表 10 已经提供了纯四度是向下纯五度“三倍”反生得到的,五度相生小七度是由 2 个纯四度相加推算得到的。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.49 + 2.49 = 4.98 \text{ 全音} \\ \text{纯四度} + \text{纯四度} = \text{五度相生小七度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \end{array} \right.$$

五度相生小三度是由 3 个纯四度减一个纯八度推算得到的。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.49 + 2.49 + 2.49 - 6 = 1.47 \\ \text{纯四度} + \text{纯四度} + \text{纯四度} - \text{纯八度} = \text{五度相生小三度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \div 2 = \frac{32}{27} \end{array} \right.$$

表 13. 三分三倍生律半音阶

校正值(全音数)		- .05	+ .02	- .03	+ .04	- .01	- .06	+ .01	- .04	+ .03	- .02	+ .05	
现代音名	c <sup>1</sup>	<sup>b</sup> d <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	<sup>b</sup> e <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	<sup>b</sup> g <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	<sup>b</sup> a <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	<sup>b</sup> b <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高	0	0.45	1.02	1.47	2.04	2.49	2.94	3.51	3.96	4.53	4.98	5.55	6
相邻两音 长度比值		$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值		0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45

在表 13 “三分三倍生律半音音阶”中，由于有含“三倍”（即分子数可以被 3 整除）生律的六律，相对波长关系比表 12 中所示例的要简单。

## 二、纯律 (Just intonation) ——三、六度生律法

除了用纯八、五、四度生律，再增添纯正协和大三度音程（即谐音列上第 4、5 号谐音之间的距离）作为生律法的依据，从而形成的律制，称为纯律。古印度、古希腊（毕达哥拉斯去世后）都有这样的律制探讨和实践运用。它的突出特点是纯律大三度略小于五度相生律大三度，它在谐音列的位置极占优势，我们可以在自然生活中直接获得这个听觉经验，其音响效果谐和；而五度相生律大三度则是相生 4 次才获得的，与基音疏远的四重属关系令其产生紧张性，两者听起来有着完全不同的审美意蕴。

### 1. 纯律的自然音程和派生音程

有了纯律大三度，自然七声音阶中就存在小全音和大半音：

小全音是纯律大三度减去大全音 ( $\frac{5}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$ )，长度比为 10 : 9，音程值为 0.91 全音 (182 音分)；大半音是纯四度减去纯律大三度 ( $\frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$ )，长度比为 16 : 15，音程值为 0.56 全音 (112 音分)。如此一来，与五度相生律相比，两种律制形成的七声音阶的内部构造就很不相同了。在每个纯四、五度框架（分别代表主、属、下属三个功能）内各加入一个音，与根音相距纯律大三度就会构成自然大调音阶（见表 14），与五音相距纯律大三度就会构成自然小调音阶（见表 15）。纯五度减去纯律大三度就会得到纯律小三度 ( $\frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$ )，长度比为 6 : 5，音程值为 1.57 全音 (314 音分)。

我们现在已经能够从谐音列上看到，纯律小三度就是第 5、6 号谐音之间的距离。谐音列提供了纯律大三度和纯律小三度，结合纯八度、纯五度，还可以推算由纯律三度派生出的各种纯律音程。仿照纯律大音阶的构成方式，在纯四、五度框架内各加入一个纯律小三度可以构成和声小调音阶（见表 16）。以下是双轨推算演示。

纯律小六度的派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - 1.93 = 4.07 \\ \text{纯八度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小六度} \\ 2 \div \frac{5}{4} = \frac{8}{5} \end{array} \right.$$

纯律大六度的派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.49 + 1.93 = 4.42 \\ \text{纯四度} + \text{纯律大三度} = \text{纯律大六度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

纯律范畴内三种半音的派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.49 - 1.93 = 0.56 \\ \text{纯四度} - \text{纯律大三度} = \text{自然半音} \\ \frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15} \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.93 - 1.58 = 0.35 \\ \text{纯律大三度} - \text{纯律小三度} = \text{同功能变化半音} \\ \frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.02 - 0.56 = 0.46 \\ \text{大全音} - \text{自然半音} = \text{反功能变化半音} \\ \frac{9}{8} \div \frac{16}{15} = \frac{135}{128} \end{array} \right.$$

小七和弦内的小七度派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.51 + 1.58 = 5.09 \\ \text{纯五度} + \text{纯律小三度} = \text{小七和弦内的小七度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \end{array} \right.$$

大七和弦内的大七度派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.51 + 1.93 = 5.44 \\ \text{纯五度} + \text{纯律大三度} = \text{大七和弦内的大七度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \end{array} \right.$$

纯律增二度的派生方式是：

$$\left\{ \begin{array}{l} 5.44 - 4.07 = 1.37 \\ \text{大七和弦内的大七度} - \text{纯律小六度} = \text{纯律增二度} \\ \frac{15}{8} \div \frac{8}{5} = \frac{75}{64} \end{array} \right.$$

表 14. 自然大调音阶

校正值(全音数)		+ .02	- .07	- .01	+ .01	- .08	- .06	
现代音名	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	1.02	1.93	2.49	3.51	4.42	5.44	6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

相邻两音音程值	1.02	0.91	0.56	1.02	0.91	1.02	0.56
---------	------	------	------	------	------	------	------

表 15. 自然小调音阶

校正值(全音数)		+ .02	+ .08	- .01	+ .01	+ .07	+ .09	
现代音名	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	$\flat e^1$	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	$\flat a^1$	$\flat b^1$	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	1.02	1.58	2.49	3.51	4.07	5.09	6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
相邻两音音程值	1.02	0.56	0.91	1.02	0.56	1.02	0.91	

表 16. 和声小调音阶

校正值(全音数)		+ .02	+ .08	- .01	+ .01	+ .07	- .06	
现代音名	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	$\flat e^1$	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	$\flat a^1$	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	1.02	1.58	2.49	3.51	4.07	5.44	6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{16}{15}$
相邻两音音程值	1.02	0.56	0.91	1.02	0.56	1.38	0.56	

## 2. 音系网的重新诠释

在以往的律学研究中,对纯律表述所用的纯律音系网,其平面布局非常合理,但对这个音系网律学内涵的表述却很不清晰,它既没有表达出纯律音律亲缘关系的本质规定性,也没有清楚展示出与十二平均律的不同。现在我们将赋予这个音系网一些新的信息,使它具有表达本质与描述现象的功能。

(1) 音系网的平面布局保持不变,横向线段表示纯四、五度亲缘关系,上五度、下四度在基音以右,下五度、上四度在基音

以左；斜向右上左下为纯律大三度和小六度，上大下小；斜向左上右下为小三度和大六度，上小下大。这种结构关系将用相对波长和校正值体现出来，书写格式为相对波长数值写在音名字母的下方，附注校正值写在音名字母的上方。

(2) 相对波长的数值演变规律为：A. 横向线段每向右扩展一步，相对波长数值乘以一次“ $\frac{1}{3}$ ”；横向线段每向左扩展一步，相对波长数值乘以一次“3”。相对波长连续乘以“2”或“ $\frac{1}{2}$ ”，只是意味着连续移低八度或移高八度，所以可以在填写相对波长数值时将质因数“2”一概省略。其伸展样式为：

图 1.  $F \xleftarrow{27} C \xleftarrow{9} G \xleftarrow{3} [D] \xrightarrow{\frac{1}{3}} A \xrightarrow{\frac{1}{9}} E \xrightarrow{\frac{1}{27}} B$

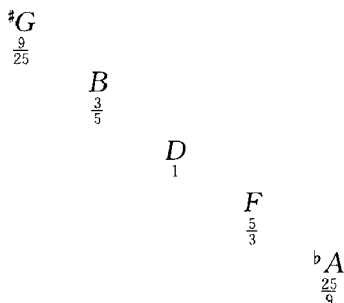
B. 斜向右上每扩展一步，相对波长数值乘以一次“ $\frac{1}{5}$ ”；斜向左下每扩展一步，相对波长数值乘以一次“5”。其伸展样式为：

图 2.

$$\begin{array}{c}
 {}^{\sharp}A \\
 \frac{1}{25} \\
 {}^{\sharp}F \\
 \frac{1}{5} \\
 D \\
 1 \\
 {}^bB \\
 5 \\
 {}^bG \\
 25
 \end{array}$$

C. 斜向左上每扩展一步，相对波长数值乘以一次“ $\frac{3}{5}$ ”；斜向右下每扩展一步，相对波长数值乘以一次“ $\frac{5}{3}$ ”。其伸展样式为：

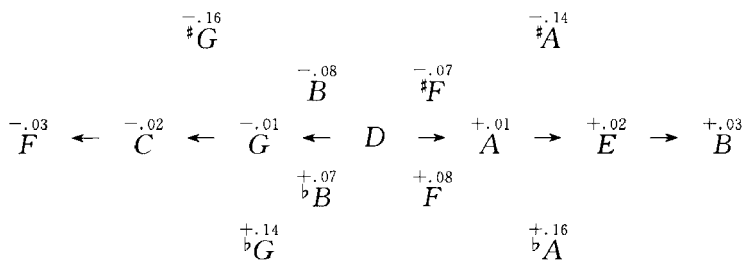
图 3.



通过以上三种相对波长数值演变规律可以看出，以  $D$  音为中心，横列呈现出“三分三倍链”，斜向纵列则呈现出“五分五倍对称”。

(3) 校正值演变规律为：横向线段每向右一段，校正值  $+ .01$ ；横向线段每向左一段，校正值  $- .01$ 。斜向线段每右上扩展一步  $- .07$ ；斜向线段每左下扩展一步  $+ .07$ 。斜向线段每左上扩展一步  $- .08$ ；斜向线段每右下扩展一步  $+ .08$ 。所以从基音朝着六个方向扩展的样式如下：

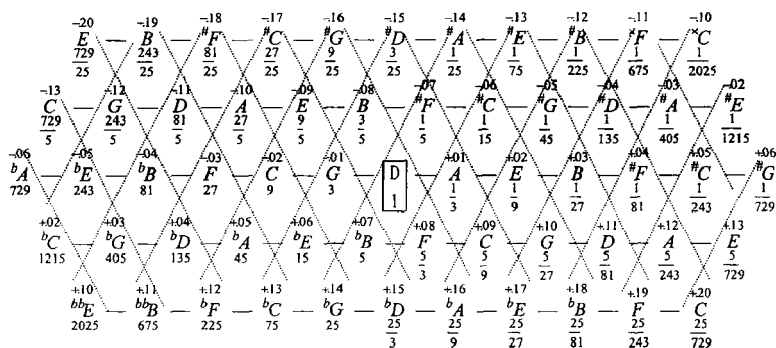
图 4.



(4) 纯律音系网：每一横列第一行为附加校正值，第二行为音名字母，第三行为相对波长数值（提取了质因数 2）。



图 5.



以上这个增加了全息信息量、具有严密逻辑的音系网，每个横列都是一个“三分三倍链”，每一条斜线都呈现出以中央横列为轴的“五分五倍”对称，从真数、对数两个层面展示了数理规律的完美对称。但对传统音系网的重新诠释并不是为了显示数理对称的美感，而是通过这个严密对称的结构张显出隐藏在其中的功能性理论内核，并辅以清晰的现象描述，为和声学理论被十二平均律遮蔽的思维缺陷找出解决之道，使理论律学研究直接与和声学、旋律学链接起来；以 D 为主音，可以将古今中外各种调式予以同主音综合，进行跨时代、跨地域、跨文化的比较研究，为民族音乐学提供形态分析的理论基础。

### 三、平均律

十二平均律 (twelve-tone equal temperament) 和二十四平均律的建立，用现代数学术语表述很简单：它就是对八度音程系数进行开方运算的结果。频率比值 2 开 12 次方，方根就是平均律半音音程系数的频率比数值，平均律半音 =  $\sqrt[12]{2} = 1.0595$ 。如此，八度音程就被均匀地分为 12 个相等的间距。再将平均律半音音程系数的频率比数值开平方，则得到  $\frac{1}{4}$  全音的频率比数值，

12 个均匀间距就又被分为 24 个均匀间距。然而在历史上，却经历了漫长的探索。各民族在各自不同的乐系之下，从各自的自然律传统出发，分别经过艰苦探索，最终殊途同归地到达十二平均律的一致认识，并产生相仿的平均律制。

需要强调指出的是，对八度音程系数进行开 12 次方，将八度音程均分为 12 个相等半音，这是对数领域里的 12 等差数列<sup>①</sup>，与真数领域内的 12 等差数列是完全不同的概念。真数领域里的等差数列就是共泛音结合的各音律所形成的序列，其形式是谐音列的倒映，所含的各音程关系与谐音列中所含的相同，只是上下恰恰颠倒。这些音程依次为：纯八度、纯五度、纯四度、纯律大三度、纯律小三度、特小三度、特大二度、大全音、小全音、特大大二度（ $\frac{11}{10}$ ，0.83 全音）、中立二度（ $\frac{12}{11}$ ，0.75 全音），每个音程的音程系数都是有理数。而十二平均律在倍半关系的基础上用开方的方式得到了对数领域均等高度的 12 个半音，但相对应的音程系数却是无理数。比如：

表 17.

	自然音程纯五度	平均律音程五度
对数——音程值	3.5097750(无理数的近似值)	3.5
真数——音程系数	$\frac{3}{2}=1.5$	1.4983071(无理数的近似值)

在平均律模拟整数关系时，它近似于整数关系的范围内，这时它是有审美价值的，但这个审美价值不是来自于无理数，而是由于它模拟整数关系，中耳和内耳的共振关系已经将那些偏离整数关系的音程纳入到整数关系中，耳蜗里毛细胞的选择性决定了

<sup>①</sup> 等差数列 (Arithmetic series)，即一个数列，如果从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个数，这个数列就叫等差数列。

它们只对那些合乎整数关系的音程产生共振。例如，十二平均律五度、四度只有细心分辨，才可以感受到拍音，听觉器官的共振已把它们纳入到整数关系的规范中，这时的审美价值就不是来自于无理数，而是由于它对整数关系的模拟。音乐听觉的审美无论协和或不协和，都服从于整数比例关系。这一点绝不可忽视。

现实中存在着一种误会的理解，认为宫调式七声音阶的音阶结构与自然大调音阶结构是一样的。从表 10 含“清角”的七声音阶和表 14 自然大调音阶的对比可以看出，它们的律制规范是不同的。这种不同决定着音乐的旋法发展，所具有的不同审美效果也是具体可感的。比如宫调式主音上大三度音程是三分损益相生四次才产生的，这种律学属性决定了它与主音之间的关系正好是比较远的，是不协和的，因此带给旋律进行上一种扩张的动力，于是在这两音中会形成规模长短不等的旋律绕行。在民间小曲中，鲜见大三度的直接连接。而五度相生律中小三度音程的和谐度却高于大三度，因为它是三倍相生三次而得，少了一个五度级。在民间小曲中，五度相生小三度的旋律进行甚至可以认定为级进。自然大调和谐三度所具有的纯净、安祥的气质来自它的简单整数比性质，振动比值越简单，效果越和谐，这个乐音世界的法则早已被发现和证明。十二平均律构成的七声音阶可以模仿宫调式也可以模仿自然大调，但音乐的审美实现究其本质却并不是来自十二平均律。

在了解了十二平均律产生的方法后，我们就应该思考一个问题：那些被称为东南亚九平均律、七平均律或五平均律，究竟是真实存在，还是理论误区？这些音乐文化的所有者，早在数学开方术发明之前就已经拥有这样的音乐，那么这种音律习惯是怎样产生的？它的物质条件是什么？既然真数领域里等差数列并不形成等差律，那么匀孔、匀品类的乐器就不可能是任何一种平均律

制。这个问题留在下文讨论。

#### 四、其他各种生律法

##### 1. 七分七倍生律

在音乐实践中,当属功能强化要求加自然七度形成属七和弦,即已引进七分生律所生音律(参见第7号谐音);下属功能强化要求在下属小和弦基础上加下属音下的小三度(转位称下属音上的大六度),这就引进了七分七倍生律所生音律。

这种音律要求是基于和声学的基本思想而产生的。被称为“和声学之父”的扎里诺(1517~1590年)根据对一根弦的和谐划分和等差划分,说明和声产生的原理,他用 $1$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 作为大和声的代表, $1$ 、 $2$ 、 $3$ 、 $4$ 、 $5$ 、 $6$ 这个等差数列作为小和声的代表,大三和弦三个音的相对波长连比式为: $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ ;小三和弦的自然数连比式为: $6 : 5 : 4$ 。这种观点影响深远,自那以后的多数和声学理论家如拉莫(Jean-Philippe Rameau, 1683-1764年)、塔尔蒂尼(Giuseppe Tartini, 1692~1770年)、豪普特曼(Moritz Hauptmann, 1792~1868年)、亥姆霍兹(Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1812~1894年)、厄汀恩(Oettingen, 1836~1920年)、里曼(Hugo Riemann, 1849~1919年)、欣德米特(Paul Hindemith, 1895~1963年)等都接受了谐音列是大调和声来源的理论,并形成和声二元论观点。虽然在早期,还没有足够的物理手段来证明“共泛音结合”<sup>①</sup>(即下

<sup>①</sup> 这个术语由赵宋光先生于1982年提出。

方共振沉音列)原理,但对于大调与小调具有同等意义与价值,两者来源完全相反这种二元论观点,一直是占主导地位的。在这样的认识基础上,德国莱比锡音乐理论学派所编的和声学教程早在20世纪中叶,就把这类音律纳入到和声功能理论的范畴之内。例如,这学派认为属七和弦的七音是属音上的“自然七度”音(七分音);自然小调、和声小调、和声大调的所谓“Ⅱ级七和弦”的“根音”,应该是由主音向下派生的“七倍音”。

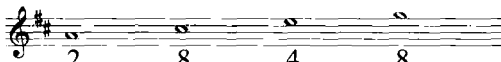
根据这个观点,“七分生律法”或“七倍生律法”所生的音律也被纳入和声功能理论,仅以纯律(三、六度生律)音系网作为和声功能理论的基础,显然已经不全面了。

(1) 属七和弦四个音的相对波长连比式为:  $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}$

D大调的属七和弦四个音各自的相对波长数值见下列谱例。

谱例4.

校正值:

+0.01	-0.06	+0.02	-0.15
			
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{21}$
$\frac{1}{3} \times (\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}) \times 2^3$			

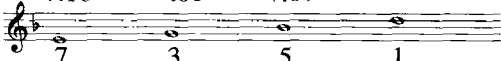
(2) 自然小调Ⅱ级七和弦四个音的自然数连比式为:

7 : 6 : 5 : 4

d小调Ⅱ级七和弦四个音各自相对波长数值见下列谱例:

谱例5. (以比基音高八度的主音  $\frac{1}{2}$  与之对应)

校正值:

+0.16	-0.01	+0.07	
			
$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$
$(7 : 6 : 5 : 4) \times 2^{-3}$			

和声理论在真数领域里的扩展,使生律法从“三分三倍”生

律、“五分五倍”生律拓展到“七分七倍”生律。

其实，在中国古琴的实践中，从设徽伊始，就已明确地运用七倍生律，十三徽（按音所得相对波长为 $\frac{7}{8}$ ）的设立就是一个具体物证。

### （3）“七分七倍生律”的编制规范

作为理论律学的任务，对于人们还不太熟悉的“七分七倍”数理规定要及时做出规范，在本章第一节中表7所给出的基本数据中就有质数7的对数值。分母含7的“七分生律法”，其跃迁算子是“ $\times \frac{4}{7}$ ”；分子含7的“七倍生律法”，其跃迁算子是“ $\frac{7}{4}$ ”。以传统音系网为根据，每一个律位上都可以运用七分生律法生出新的律位。可以设想：把主音D看作下属调（G大调）的属音，以它为根据建立一个属七和弦，这和弦的七音就是“主音上方自然七度”那音，由七分生律法生出的律位C（-16全音），相对波长为 $1 \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ 。在属音A（+.01）上建立一个属七和弦，这和弦的七音就是“属音上方自然七度”那音，由七分生律法生出的律位G（-15全音），相对波长为 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} \times 2^n = \frac{4}{21} \times 2^2 = \frac{16}{21}$ 。把下属音G（-15）看作重下属调（C大调）的属音，以它为根据建立一个属七和弦，这和弦的七音就是“下属音上方自然七度”那音，由七分生律法生出的律位F（-0.17全音），相对波长为 $3 \times \frac{4}{7} \times 2^n = \frac{12}{7} \times 2^{-1} = \frac{6}{7}$ 。

同理，自然小调主音d的下方自然七度（即上方“特大二

度”)那音作为自然小调Ⅱ级七和弦的“根音”,<sup>①</sup> 相对波长为 $\frac{1}{2}$   
 $\times \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$ 。

由此我们已经看到,与纯律音系网的构建同理,原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子“ $\times \frac{4}{7}$ ”、“ $\times \frac{7}{4}$ ”直接生出新的律位。

## 2. 11 倍、13 分生律

阿拉伯“四分之三音”(中立音)体系中引进了 11 倍、13 分的生律因素,虽然它们在很长时间内不是世界律学史上的主流,不被人们所重视,但标志着人类对音律世界数理规律的深入认识,是律学学科的高度智慧结晶。

由于阿拉伯人的音律实践是要在乌德琴中弹出中立三度和中立六度,因此律学思维也围绕着如何解决这个问题而展开。早在中世纪,他们就已经认识到用谐音列上第 12 号谐音与第 11 号谐音之间构成的音程和第 13 号谐音与第 12 号谐音之间构成的音程可以解释中立三、六度的派生来源。

(1) 11 倍生律的情况是:

$$\begin{array}{rcccl} \text{大全音} & + & \text{中立二度} & = & \text{中立三度} \\ \frac{8}{9} & \times & \frac{11}{12} & = & \frac{22}{27} \end{array}$$

从表 7 中提供的数据可以算出 $\frac{11}{12}$ 的音程值为 0.7531853 全音

(150.64 音分),则可知中立三度 $\frac{22}{27}$ 的音程值为:

$$1.02 \text{ 全音} + 0.7532 \text{ 全音} = 1.7732 \text{ 全音} = 354.64 \text{ 音分}$$

---

<sup>①</sup> 从基础乐理的视角看,把它认作根音,但实际上,它是由共泛音结合的音列派生的七倍音。

$$\begin{array}{rclcl} \text{纯五度} & + & \text{中立二度} & = & \text{中立六度} \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{11}{12} & = & \frac{11}{18} \end{array}$$

中立六度 $\frac{11}{18}$ 的音程值为:

$$3.51 \text{ 全音} + 0.7532 \text{ 全音} = 4.2632 \text{ 全音} = 852.64 \text{ 音分}$$

根据中立三度和中立六度,我们还可以求出“11 倍生律法”的中立三、六度音程与五度相生大三度和大六度之间的跃迁算子。

中立三度与五度相生大三度之间的音程系数就是跃迁算子,根据音程系数的关系式,我们可以求出这两音之间的音程系数:

中立三度与五度相生大三度之间的音程系数 =  $\frac{\text{较低音律的相对波长}}{\text{较高音律的相对波长}}$

$$\text{即 } \frac{22}{27} \div \frac{64}{81} = \frac{22}{27} \times \frac{81}{64} = \frac{33}{32}$$

中立六度与五度相生大六度之间的跃迁算子(音程系数)为:

$$\frac{11}{18} \div \frac{16}{27} = \frac{11}{18} \times \frac{27}{16} = \frac{33}{32}$$

由此得知,“11 倍生律法”的跃迁算子为“ $\times \frac{33}{32}$ ”。

(2) 13 分生律的情况是:

$$\begin{array}{rclcl} \text{大全音} & + & \text{中立二度} & = & \text{中立三度} \\ \frac{8}{9} & \times & \frac{12}{13} & = & \frac{32}{39} \end{array}$$

从表 7 中提供的数据同样可以算出 $\frac{12}{13}$ 的音程值为 0.6929 全

音 (138.58 音分), 则可知中立三度 $\frac{32}{39}$ 的音程值为:

$$1.02 \text{ 全音} + 0.6929 \text{ 全音} = 1.7129 \text{ 全音} = 342.58 \text{ 音分}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{纯五度} & + & \text{中立二度} & = & \text{中立六度} \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{12}{13} & = & \frac{8}{13} \end{array}$$



中立六度 $\frac{8}{13}$ 的音程值为:

$$3.51 \text{ 全音} + 0.6929 \text{ 全音} = 4.2029 \text{ 全音} = 840.58 \text{ 音分}$$

同理,我们也可以求出“13分生律法”的中立三、六度音程与五度相生大三度和大六度之间的跃迁算子。

中立三度与五度相生大三度之间的跃迁算子为:

$$\frac{32}{39} \div \frac{64}{81} = \frac{32}{39} \times \frac{81}{64} = \frac{27}{26}$$

中立六度与五度相生大六度之间的跃迁算子为:

$$\frac{8}{13} \div \frac{16}{27} = \frac{8}{13} \times \frac{27}{16} = \frac{27}{26}$$

由此得知,“13分生律法”的跃迁算子为“ $\times \frac{27}{26}$ ”。

(3)“11分11倍生律”和“13分13倍生律”的编制规范

从前边已经提到的“三分三倍”、“五分五倍”、“七分七倍”在旋律学与和声学方面的功能性内核,“11倍生律”和“13分生律”也同样可以两元生成,再来讨论“11分11倍生律”和“13分13倍生律”就不难理解了。质数“11”生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征,原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子“ $\times \frac{8}{11}$ ”、“ $\times \frac{11}{8}$ ”直接生出新的律位,建立起一个“11分11倍生律”的音系网;同样,质数“13”生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征,原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子“ $\times \frac{16}{13}$ ”、“ $\times \frac{13}{16}$ ”直接生出新的律位,建立起一个“13分13倍生律”的音系网。

对于11、13这种质数所构成的音阶,十二平均律也没有能力来模仿,需要二十四平均律才能对之模仿。

## 第三章

# 律学研究历史的发展与回顾

第一节 中国最早的律学实践与记载

第二节 律学理论的纵深发展

第三节 应用律学的成果——荀勖笛律

.....



## 第一节

# 中国最早的律学实践与记载

律学是人类对音律之间自然关系的规律性认识的学问。由于地理地域的不同、生活环境和物质材料获得的不同,人们发现音律规律的途径也各有差异。人类对音律规律的认识能力所代表的知识水平,呈现着历时性的发展进步,每一个民族在律学学科上的一个新发明或新发现,都是这个科学领域里相继而来的智慧结晶。

### 一、《管子·地员篇》——三分损益法的最早记录

在中国,三分损益律——五度相生律(三分三倍律)有着悠久的历史。中国古代最早有关音律的记载是《管子·地员篇》(约公元前4世纪,管仲本人的生活年代约为公元前730年~前645年):

凡将起五音,凡首,先主一而三之。四开以合九九,以是生黄钟小素之首以成宫。三分而益之以一,为百有八,为徵;不无有三分而去其乘,适足,以是生商;有三分而复于其所,以是成羽;有三分去其乘,适

足，以是成角。”<sup>①</sup>

这段记写于公元前 4 世纪的文字，里边包含的信息非常丰富，我们用律学的语言来解读这段文字：

宫	黄钟 <sub>小素之首</sub>	$1 \times 3^4 = 81 = 3^4$	
徵	三分益一	$81 \times \frac{4}{3} = 108 = 3^3 \times 2^2$	(上生)
商	三分损一	$108 \times \frac{2}{3} = 72 = 3^2 \times 2^3$	(下生)
羽	三分益一	$72 \times \frac{4}{3} = 96 = 3^1 \times 2^5$	(上生)
角	三分损一	$96 \times \frac{2}{3} = 64 = 2^6$	(下生)

按音阶顺序排列：

徵	羽	宫	商	角
108	96	81	72	64

表 18.

生律顺序	1	3	0	2	4
传统阶名	徵	羽	宫	商	角
律数	108	96	81	72	64
相对波长	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{27}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$
音程系数	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	
音程值	大全音	五度相生的小三度	大全音	大全音	

在这个音阶中，已经形成五度相生律（三分损益律）大、小

<sup>①</sup> 《管子集校》，郭沫若、闻一多、许维遹撰，科学出版社 1956 年 3 月第 1 版，第 909～910 页。

三度、大六度以及大全音，主音下方的纯四度（下徵）以纯五度的低八度表述而符合三分损益法则。

古代文献《国语·周语下》（公元前6世纪）最早已经记载了全部十二律律名，而曾侯乙编钟的出土，也说明了先秦十二律的存在事实，为什么《管子·地员篇》只算了五个音？已有的研究成果认为《管子》“五音”是与琴有关的历史文献，因为这五音的关系正合古琴“正调”<sup>①</sup>。但作为传统律学理论文献，我们首先应该解释清楚其律学内涵，为什么只算了五个音。毋庸置疑，这个文献的重要价值在于：

（1）首次以三分损益法生五音，而且这个表述清晰的相生逻辑形成了最基本的五声音阶结构。

（2）所有律数呈整数关系，这种有理数的整数比关系是符合自然法则的。以3底4次幂（ $3^4=81$ ）为出发律，第4次生出“角”音，其律数（64）不能再继续三分，这显示出了古代保持整数的算术技巧。

## 二、曾侯乙编钟铭文

中国古代虽然没有专门的纯律理论，但在传统乐器古琴的演奏及其大量有关文献中却包含着纯律的实践和理论，琴上三徽、六徽、八徽、十一徽、十二徽的按音及三、六、八、十一徽的泛音都能产生纯律音程，调弦法理论也反映了纯律的运用。但由于琴律的记述年代较晚，对中国传统理论没有太大的影响，也没能形成系统的纯律理论。而20世纪70年代末出土的曾侯乙编钟让我们看到在当时已经存在的纯律实践，曾侯乙编钟铭文反映出了古代钟律的基本规定。

<sup>①</sup> 崔宪《曾侯乙编钟铭文校释及其律学研究》（以下简称“催书”）之下编“《管子》五音与琴的正调”一节，第160页。

### 1. 编钟铭文记录了早期弦律的应用实践

曾侯乙编钟（公元前 433 年入葬，公元 1978 年出土）的发现使争讼已久的“先秦编钟双音结构”得到实物确证，并由此得出中国音乐早有三度生律的传统之结论。根据编钟铭文研究得知钟律生律法以“颀曾体系”为原则。<sup>①</sup> 这是一个以四基、四颀、四曾为结构逻辑的律制体系，形成一个律位有不同律高的事实，测音数据也证实了这一点。具体而言，当乐音以旋律音程先后相继而生时，呈现出三分、三倍的五度相生关系；而当乐音以和声音程同时而生时，如同先秦编钟同体双音的协和关系，是来自五分、五倍生律关系，这就构成了包含着“三分三倍”和“五分五倍”两种生律法的音系。

“四基”——宫、商、徵、羽四个基本音级构成全部律学体制的基础，它们分别相当于琴的正调定弦中的四个散声，与管子五音的前四声保持一脉，体现出三分生律关系，它的反生方向的延伸则为三倍生律关系。

“四颀”（四角）四音处于“四基”四音上方纯律大三度，与基列各音为五分生律关系，在“四基”各音名后添加缀词“颀（角）”<sup>②</sup>。“颀（角）”在铭文中的地位是比较突出的，前后分别出现过“索宫之颀”（长枚中·3 左鼓）、“兽钟之羽颀下角”之“羽颀”（长枚低·4 右鼓部）、“无射之徵颀”（长枚低·3 右鼓部）、“新钟之商颀”（短枚中·8）和“姑洗之商角，羸季之宫”等等。测音数据也表明了“颀”有基音上方纯律大三度的结构意义。

“四曾”四音处于“四基”四音下方纯律大三度，与基列各音为五倍生律关系，在“四基”各音名后添加缀词“曾”。铭文中分

① 黄翔鹏在《曾侯乙钟磬铭文乐学体系初探》一文中提出这个概念。

② “颀”与“角”二字意义相近，但有微小差异。参见崔书第 150 页。

别出现“姑洗之宫曾”（无枚中·2右鼓部）、“姑洗之商曾”（长枚低·9右鼓部）、“姑洗之徵曾”（长枚低·6右鼓部）、“刺音之羽曾”（长枚中·3左鼓）等等。但关于带“曾”这个缀词的音，测音数据表明有五度相生三度和纯律三度的同律位不同音高的情况，所以对“曾”的意义还有一种观点，认为“曾”既有五倍三度生律性质，又有三倍反生方向生律的性质。而且从测音数据反映出来的规律性基本上呈以“曾”为缀词的音位，与基链为大三度关系时多呈五度相生大三度，为小三度关系时多呈纯律小三度。

曾侯乙编钟的音列正是“颀曾体系”的完备模式。“颀曾体系”以弦律为根本，关于这一点，黄翔鹏先生对同室出土的“均钟”之破解是最重要的辅助研究<sup>①</sup>，对于“管律”、“弦律”之争做出以实物为基础的论证，文中主要观点为：均钟是专为调钟的律准，先秦编钟一钟双音的结构要求每钟必严守三度同体谐和的关系，故钟律与三分损益律之间有的吻合，有的不吻合；均钟定弦法与《管子》五音之序相同，为古代乐律学理论中的下徵调“均法”，与古琴正调定弦法相同。

由于“颀曾体系”是以弦律为根本，其律制的性质就有着多重性，除了以上提到的兼含三分、三倍生律因素和五分、五倍生律因素以外，还提供了更深层的数理领域。虽然我们直到20世纪80年代才真正了解到这一律学理论与应用方面的遗产，但作为一门学科知识的认识水平和应用水平，则是早在公元前5世纪就已经达到了极高的程度。

## 2. 铭文内容体现出的律学表达系统

现在，我们将1978年曾侯乙编钟出土以来，古文字学家和音乐学家们的研究成果进行整合表述。

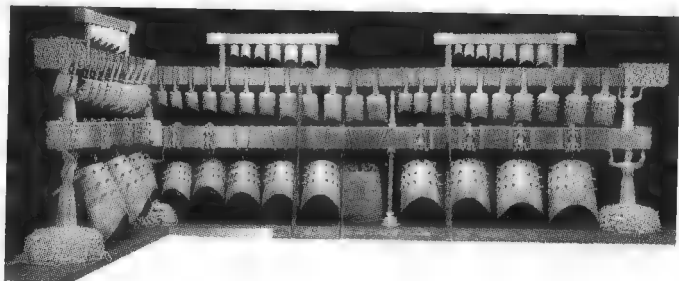
---

<sup>①</sup> 详见黄翔鹏《均钟考》一文中的论述。



整个编钟呈曲尺状排列，下层分三组，图6中左为下一层一组共3枚，中间为下一层二组共6枚，右侧为下一层三组共4枚；中层一组共11枚，中层二组共12枚，中层三组共10枚；最上一层也分三组，上层一组共6枚，二组共6枚，三组共7枚。

图6. 曾侯乙编钟



#### (1) 基列——基链

长枚倍·2（下一层一组第1枚）铭文：“兽钟之涑钬，穆钟之涑(qì)商，姑洗之涑宫，浊新钟之徵。”<sup>①</sup>（见表19中第四列，姑洗钟，音名为c）

又见长枚低·6（下一层二组第5枚）铭文：“姑洗之宫，姑洗之在楚号为吕钟。”根据裘锡圭释文，此钟为姑洗律，低音宫，穆钟上方五度相生大二度；浊新钟上方纯五度；兽钟上方五度相生大三度。

长枚低·3（下一层二组第8枚）铭文：“姑洗之徵。太簇之羽，新钟之变商，蕤宾之羽曾，黄钟之徵角，韦音之徵曾，宣钟之珈徵。”根据裘锡圭释文，可知此钟为姑洗上方纯五度，太簇上方五度相生大六度（见表19中第五列，浊兽钟，音名为g）。

又见短枚中·3（中层一组第9枚）铭文：“姑洗之徵。穆钟

① 参见崔书第29、224页，根据测音姑洗律音高定为C；钬意为低音角。

之羽，新钟之羽颺，浊兽钟之宫。”这段说得很清楚，“浊兽钟”为宫的那音，是姑洗的上方纯五度；穆钟上方五度相生大六度。又根据“坪皇之宫……浊兽钟之徵”、“文王之宫……浊兽钟之羽”之言，故而判断，此钟即浊兽钟。

长枚低·1（下一层二组第10枚）铭文：“坪皇之宫，姑洗之清商，穆钟之角，新钟之宫曾，浊兽钟之徵。”另见长枚倍·3（下一层一组第2枚）铭文。根据裘锡圭释文，可知坪皇钟为蕤宾律，<sup>①</sup>为姑洗上方大全音，浊兽钟上方纯五度。（见表19中第六列，坪皇钟，音名为d）

长枚低·4（下一层二组第7枚）铭文：“姑洗之羽。夷则之徵，新钟之徵曾，应音之变商，韦音之羽曾。”这段话表明了这样的关系：此钟为姑洗上方五度相生大六度那音。（见表19中第七列，浊穆钟，音名为a）

长枚低·2（下一层二组第9枚）铭文：“文王之宫，坪皇之商，姑洗之钃，新钟之商曾，浊兽钟之羽。”根据裘锡圭释文，可知文王钟是坪皇钟上方大全音；姑洗（吕钟）上方五度相生大三度；浊兽钟上方五度相生大六度；新钟下方三度相生大二度（即小全音）。又根据短枚中·3（中层一组第9枚）左鼓背面铭文：“文王之终，新钟之羽曾，浊穆钟之商，浊姑洗之宫。”得知浊姑洗是文王之徵<sup>②</sup>，浊穆钟之商，因而可以判断长枚低·4钟正鼓音，即姑洗之羽为浊穆钟。（见表19中第八列，文王钟，音名为e）

无枚中·5（中层二组第8枚）右鼓铭文：“文王之羽，新钟之徵，浊坪皇之宫。”又见短枚中·4（中层一组第8枚）右鼓铭

① 转引自崔书第31、225页C·65·下·一·2[正]：“妥（蕤）宾之才（在）楚号为坪皇”。

② “终”为高八度“徵”的异名。见崔书第91页注释。

文。这里表明，文王上方五度大六度那音为浊坪皇，为右鼓音。  
(见表 19 中右一列，浊坪皇钟，音名为 $\sharp c$ )

将以上铭文的内容排列起来，以姑洗为宫，其它各音与姑洗形成如下五度链关系：

穆钟 $\leftarrow$ 浊新钟 $\leftarrow$ 姑洗 $\rightarrow$ 浊兽钟 $\rightarrow$ 坪皇钟 $\rightarrow$ 浊穆钟 $\rightarrow$ 文王钟 $\rightarrow$   
浊姑洗 $\rightarrow$ 无射 $\rightarrow$ 浊坪皇

表 19. ①

古代律名		穆音(曾) 穆钟(楚) 槃钟(晋)	浊新钟 (楚)	姑洗 (曾、楚) 吕钟(楚)	浊兽钟 (楚)	蕤宾(曾) 坪皇(楚) 夷则(申)	浊穆钟 (楚)	文王 (楚)	浊姑洗 (楚、曾)	无射 (曾)	(浊坪皇)
校正值		-0.02	-0.01		+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07
											
相对 波长 <sup>②</sup>	小字二组	$\frac{9}{128}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{256}{2187}$
	小字一组	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{128}{729}$	$\frac{512}{2187}$
	小字组	$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{256}{729}$	$\frac{1024}{2187}$
	大字组	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2048}{2187}$

中间四基之音的铭文非常清楚地表明了姑洗均的宫、徵、商、羽四音，姑洗以左浊新钟、穆钟和浊穆钟以右各音的逻辑演绎关系。

## (2) 一次低列——阳链

① 表中第一行参见崔书第 25 页“曾侯乙编钟各国律名音分值(数)一览表”之基列。

② 赵宋光在一篇未发表的文章《探寻曾侯乙编钟音系的数理结构》(2001 年提交第四届律学研讨会)中将崔宪梳理出的一览表中的音系关系用相对波长作进一步的律学表述。

根据乐音在调式组织结构方面所体现出的色彩性,运用中国传统哲学中的阴阳观念,对下列这类色彩性音列表述为阳链。

长枚中·5(中三层第6枚)铭文:“姑洗之宫角。韦音之宫。……”<sup>①</sup>又见长枚低·8(下一层二组第3枚)铭文:“韦音之宫。韦音之在楚号为文王。夷则之商,为刺音变徵。”左鼓正面铭文:“应音之宫。应音之在楚为兽钟,其在周为应音。”<sup>②</sup>此铭文说明韦音为姑洗上方大三度。(见表20中第四列,韦音,音名为e)

长枚低·9(下一层二组第2枚)铭文:“姑洗之商角。羸𡗗之宫。羸𡗗之在楚为新钟,其在齐为吕音。”<sup>③</sup>此铭文说明羸𡗗为姑洗之商的上方大三度。(见表20中第六列,新钟,音名为<sup>4</sup>f)

长枚低·2(下一层二组第9枚)右鼓铭文:“兽钟之宫,新钟之涓商,浊姑洗之羽。”<sup>④</sup>此铭文说明兽钟与新钟和浊姑洗的关系,兽钟之宫为右鼓音。

长枚中·9(中三层第2枚)铭文:“太簇之在周号为刺音,其在晋号为槃钟。”<sup>⑤</sup>这两段铭文说明这几音之间的五度链关系。(见表20中右三列,兽钟,音名为<sup>4</sup>g;右一列,槃钟,音名为<sup>4</sup>a,与基链中的穆钟为同律位)

长枚低·4(下层二组第7枚)铭文:“姑洗之羽角,为文王羽,为坪皇徵角,为兽钟之羽颀下角。”<sup>⑥</sup>此钟为姑洗之羽的上方大三度;文王上方大六度;坪皇之徵的上方大三度。(见表20中右四列,音名为<sup>4</sup>c,与浊坪皇为同律位)

① 崔书第68、242页C·65·中·三·6[反]。

② 崔书第53、227页C·65·下·二·3[正]。

③ 崔书第55、226页C·65·下·二·2[正](1)。

④ 崔书第85、234页C·65·中·一·10[反]。


⑤ 崔书第78、240页C·65·中·三·2[反](3)。

⑥ 崔书第43、229页C·65·下·二·7[正](4)。

长枚倍·2（下一层一组第1枚）右鼓铭文：“兽钟之涓微，浊坪皇之商，浊文王之宫，浊姑洗之下角。”又见无枚中·6（中层二组第7枚）右鼓铭文：“新钟之羽，浊坪皇之商，浊文王之宫。”又见短枚中·5（中层一组第7枚）右鼓铭文。<sup>①</sup>这几段铭文说明浊文王为宫，与兽钟、新钟、浊坪皇的音程关系。（见表20中右二列，音名为<sup>#</sup>d）

韦音——姑洗之宫角（长枚中·5正鼓音），其测音数据（384音分）<sup>②</sup>与姑洗构成一个纯律大三度，以上铭文展示出了各音的逻辑关系。韦音的测音数据可以转换为相对波长，其它各音的相对波长根据五度链的相生关系推演排列如下。

表 20. ③

古代律名				韦音 (曾、周) 文王(楚)		羸孚 (曾、周) 新钟(楚)	(浊坪 皇)	应音(周) 应钟(曾) 兽钟(楚)	(浊文 王)	(槃钟) (太簇) (刺音)
校正值		-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01
										
相对 波长	小字二组	$\frac{9}{80}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{16}{135}$	$\frac{32}{405}$	$\frac{128}{1215}$	$\frac{256}{3645}$
	小字一组	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{32}{135}$	$\frac{64}{405}$	$\frac{256}{1215}$	$\frac{512}{3645}$
	小字组	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{128}{405}$	$\frac{512}{1215}$	$\frac{1024}{3645}$
	大字组	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{128}{135}$	$\frac{256}{405}$	$\frac{1024}{1215}$	$\frac{2048}{3645}$

① 崔书第28、92、115、224页C·65·下·一·1[正](4)；237页C·65·中·二·7[反](3)；233页C·65·中·一·7[反](3)。

② 此数据见崔书第206页“长枚中·5”之正鼓音。

③ 表中第一行参见崔书第25页“曾侯乙编钟各国律名音分值数一览表”之一次低列。

### (3) 一次高列——阴链

根据乐音在调式组织结构方面所体现出的色彩性,运用中国传统哲学中的阴阳观念,对下列这类色彩性音列表述为阴链。

长枚低·2(下层二组第9枚)左鼓铭文:“文王之涪钃,新钟之商,姑洗之宫曾,浊坪皇之徵。”<sup>①</sup>此段铭文意为姑洗之宫曾那音,也是新钟之商,浊坪皇之徵等等,而该钟右鼓铭文又有“兽钟之宫,新钟之涪商”一句,因而可以判断出姑洗之宫曾那音正是兽钟。(见表21中第五列,音名为<sup>b</sup>a)

长枚低·5(下层一组第3枚)右鼓铭文:“姑洗之徵曾,为黄钟徵,为坪皇变商,为夷则羽角。”<sup>②</sup>此段铭文意为姑洗之徵曾那音,也是黄钟之徵。参照长枚倍·2右鼓铭文“兽钟之涪徵……浊文王之宫”一句,可知姑洗之徵曾就是浊文王那音。(见表21中第六列,音名为<sup>b</sup>e)

长枚低·9(下层二组第2枚)右鼓铭文:“姑洗之商曾。穆音之宫。穆音之在楚为穆钟。其在周为刺音。”<sup>③</sup>此段铭文意为姑洗之商曾那音,正是“穆钟”。(见表21中右五列,音名为<sup>b</sup>b)

长枚低·1(下层二组第10枚)右鼓铭文:“兽钟之羽,穆钟之徵,姑洗之羽曾,浊新钟之宫。”<sup>④</sup>此段铭文意为兽钟之羽的那音为姑洗之羽曾,名为“浊新钟”。(见表21中右四列,音名为f)

长枚低·6(下层二组第5枚)正鼓铭文:“姑洗之宫,姑洗之在楚号为吕钟,其反为宣钟,宣钟之在晋号为六墉。太簇之商,黄钟之钃,蕤宾之商曾。”另见长枚中·6(中层三组第5枚)右

① 崔书第38、230页C·65·中·三·2[正](4)。

② 崔书第46、225页C·65·下·一·3[正](3)。

③ 崔书第55、226页C·65·下·二·2[正](3)。

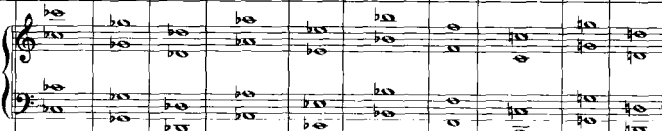
④ 崔书第35、230页C·65·下·二·10[正](3)。

鼓铭文：“姑洗之宫后，姑洗之在楚号为吕钟，其反为宣钟。”<sup>①</sup> 此段铭文意为姑洗之高八度为宣钟。测音数据表明“宫后”比吕钟（姑洗）高一个普通音差。（见表 21 中右三列，宣钟，音名为 c）

长枚倍·2（下一层一组第 1 枚）右鼓铭文：“兽钟之涿徵，浊坪皇之商，浊文王之宫，浊姑洗之下角。”左鼓铭文：“新钟之涿羽，浊坪皇之涿商，浊文王之涿宫。”<sup>②</sup> 这段铭文说明各音之间的逻辑关系。

兽钟——姑洗之宫曾（长枚低·2）与姑洗构成一个纯律小六度（测音数据偏低），以上铭文展示出了各音的逻辑关系，兽钟的测音数据可以转换为相对波长，其它各音的相对波长根据五度链的相生关系推演排列如下。

表 21. <sup>③</sup>

古代律名		(浊姑洗)	(新钟)	浊坪皇 (楚)	黄钟(曾) 兽钟(楚)	浊文王 (楚)	太簇(曾) 穆钟(楚) 刺音(周)	(浊新 钟)	宣钟 (曾、周) 六壙(晋)		
校正值		+04	+05	+06	+07	+08	+09	+10	+11	+12	+13
											
相对 波长	小字二组	$\frac{135}{2048}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{80}{729}$
	小字一组	$\frac{135}{1024}$	$\frac{45}{256}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{160}{729}$
	小字组	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{320}{729}$
	大字组	$\frac{135}{256}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{160}{243}$	$\frac{640}{729}$

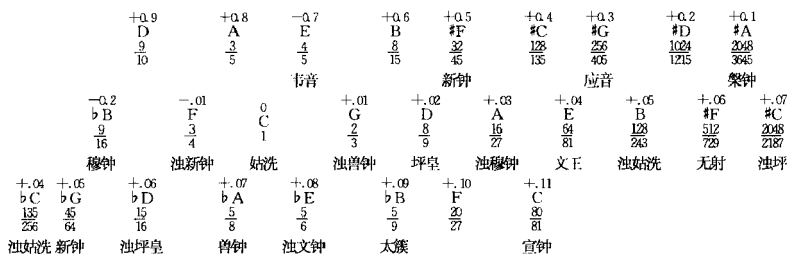
① 崔书第 48、72、228 页 C·65·下·二·5 [正] (1)、241 页 C·65·中·三·5 [反] (3)。

② 崔书第 28、224 页 C·65·下·一·3 [正] (3)、(4)。

③ 表中第一行参见崔书第 25 页“曾侯乙编钟各国律名音分值(数)一览表”之一次高列。

根据姑洗—韦音（姑洗之宫角）—兽钟（姑洗之宫曾）这三音所统领的三个五度链之间的关系，可以将这三个音列整合为一个音系网：

图 7. 曾侯乙编钟铭文音系网



### 三、《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》——十二律相生而出的最早记录

继《管子·地员篇》之后，《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》（公元前3世纪）用三分损益法将五律增加到十二律，使调式可以在十二律上进行旋宫，构成各种调高。

黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生；三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。<sup>①</sup>

这段文字提供的信息非常明确，交待了相生原则是三分益一为上生，三分损一为下生，某些律为上生，某些律为下生，用律学的语言来解读这段文字：

<sup>①</sup> 《吕氏春秋》第47页上栏。



表 22. ①

生律序号	借用现代唱名	律吕名	三分损益次第相生	生律方向	质底幂积式
0	Do	黄钟	1		$=2^0 \cdot 3^0$
1	So	林钟	$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	下生	$=2^1 \cdot 3^{-1}$
2	Rai	太簇	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$	上生	$=2^3 \cdot 3^{-2}$
3	La	南吕	$\frac{8}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$	下生	$=2^4 \cdot 3^{-3}$
4	Mi	姑洗	$\frac{16}{27} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{81}$	上生	$=2^6 \cdot 3^{-4}$
5	Ti	应钟	$\frac{64}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{243}$	下生	$=2^7 \cdot 3^{-5}$
6	Fei	蕤宾	$\frac{128}{243} \times \frac{4}{3} = \frac{512}{729}$	上生	$=2^9 \cdot 3^{-6}$
7	Di	大吕	$\frac{512}{729} \times \frac{4}{3} = \frac{2048}{2187}$	上生	$=2^{11} \cdot 3^{-7}$
8	Sei	夷则	$\frac{2048}{2187} \times \frac{2}{3} = \frac{4096}{6561}$	下生	$=2^{12} \cdot 3^{-8}$
9	Rui	夹钟	$\frac{4096}{6561} \times \frac{4}{3} = \frac{16384}{19683}$	上生	$=2^{14} \cdot 3^{-9}$
10	Li	无射	$\frac{16384}{19683} \times \frac{2}{3} = \frac{32768}{59049}$	下生	$=2^{15} \cdot 3^{-10}$
11	Min	仲吕	$\frac{32768}{59049} \times \frac{4}{3} = \frac{131072}{177147}$	上生	$=2^{17} \cdot 3^{-11}$

谱例6. 借用五线谱记谱表示《吕氏春秋》的计算结果

校正值: (全音数) +.01+.02+.03+.04+.05+.06+.07+.08+.09+.10+.11+.12

(音分数) +2 +4 +6 +8 +10+12 +14 +16 +18 +20 +22 +24



黄 林 太 南 姑 应 蕤 大 夷 夹 无 仲 (清)  
黄

① 此处用赵宋光设计的“三轴协变唱名”，详见《三轴协变唱名法》、《五度链，调域宫系三观念的基础练习》，见《赵宋光文集》第二卷 194—197，207—222 页。

这段文献的重要价值在于：

最早以三分损益法算齐了十二律。

先下生后上生以及蕤宾重上生是其突出特点。“蕤宾后重上生”可以使所得十二律保持在一个八度内，在应用律学方面，可以保持十二支律管从黄钟到应钟依次递进，长短有序，也是乐律学史上的一个重要话题。

以上采用了“质底幂积”的表达式，这样的表达还含有生律编号的意义。传统律学历来有“律序”这个概念，以黄钟为首律，林钟为第二律，太簇为第三律，……按照生律顺序，依次排列。但黄钟作为出发律，还没有参与相生，所以将其编为 0 号，以下各律从 1 开始，按生律顺序编号，这样的生律编号正好与 3 底幂的指数相一致。所以用“质底幂积”的表达式，有助于一目了然地把握每一律的相生顺序及次数。其中质数“2”，无论 2 底幂指数怎样累积，只是做高低八度的音区移位，不会改变律位。黄钟的相对长度设为 1，可以写作“ $2^0 \cdot 3^0$ ”。这种生律编号的意义在后文中有关多律探索的分析中将发挥更重要的作用。

## 第二节

# 律学理论的纵深发展

### 一、《淮南子》律数——自然数的开拓

#### 1. 初立黄钟大数

在中国古代，虽然没有关于纯律音程成系统的理论，但也仍能从早期文献中看到一些纯律的痕迹。《淮南子·天文训》（淮南王刘安卒于公元前122年）中有关律学的一段记载就透露出这样的信息：

……以三参物，三三如九，故黄钟之率九寸而宫音调。因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。……十二各以三成，故置一而十一三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉。……<sup>①</sup>

这段文字表达出的主导思想仍然是建立在三分损益法基础上的。为了保持整数局面，预先设定了相生十一次，以3的11次幂作为黄钟大数—— $177147 = 3^{11}$ 。这是继管子律数后又一次有意识地体现保持整数的算术技巧。

若按黄钟大数177147，以三分损益法逐次求出十二律律数，

<sup>①</sup> 《淮南子·卷三·天文训》，《诸子集成》第7卷第35页。

可得出如下结果列于表中第三列：

表 23.

律吕名	大数幂式	大数	管子律数出发的系列	十进制带分数	约数
黄钟	$2^0 \cdot 3^{11}$	177147	$2^0 \cdot 3^4$	81	81
林钟	$2^1 \cdot 3^{10}$	118098	$2^1 \cdot 3^3$	54	54
太簇	$2^3 \cdot 3^9$	157464	$2^3 \cdot 3^2$	72	72
南吕	$2^4 \cdot 3^8$	104976	$2^4 \cdot 3^1$	48	48
姑洗	$2^6 \cdot 3^7$	139968	$2^6 \cdot 3^0$	64	64
应钟	$2^7 \cdot 3^6$	93312	$2^7 \cdot 3^{-1}$	$42 \frac{2}{3}$	43
蕤宾	$2^9 \cdot 3^5$	124416	$2^9 \cdot 3^{-2}$	$56 \frac{8}{9}$	57
大吕	$2^{11} \cdot 3^4$	165888	$2^{11} \cdot 3^{-3}$	$75 \frac{23}{27}$	76
夷则	$2^{12} \cdot 3^3$	110592	$2^{12} \cdot 3^{-4}$	$50 \frac{46}{81}$	51
夹钟	$2^{14} \cdot 3^2$	147456	$2^{14} \cdot 3^{-5}$	$67 \frac{103}{243}$	67
无射	$2^{15} \cdot 3^1$	98304	$2^{15} \cdot 3^{-6}$	$44 \frac{692}{729}$	45
仲吕	$2^{17} \cdot 3^0$	131072	$2^{17} \cdot 3^{-7}$	$59 \frac{2039}{2187}$	60

## 2. 寻找等差数列

《淮南子》给出黄钟大数后，却又有一段话令历代律学家们困惑不已：

……黄钟为宫，宫者，音之君也。故黄钟位子，其数八十一，主十一月，下生林钟；林钟之数五十四，主六月，上生太簇；太簇之数七十二，主正月，下生南吕；南吕之数四十八，主八月，上生姑洗；姑洗之数六十四，主三月，下生应钟，应钟之数四十二，主十月，上生蕤宾。蕤宾之数五十七，主五月，上生大吕。大吕

之数七十六，主十二月，下生夷则，夷则之数五十一，主七月，上生夹钟。夹钟之数六十八，主二月，下生无射。无射之数四十五，主九月，上生仲吕。仲吕之数六十，主四月，极不生。徵生宫，宫生商，商生羽，羽生角，角生姑洗，姑洗生应钟，比于正音，故为和。应钟生蕤宾，不比正音，故为缪。

我们先将这组律数顺序排列如下：

十一 月	十二 月	正 月	二 月	三 月	四 月	五 月	六 月	七 月	八 月	九 月	十 月	十一 月	十二 月
子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥	子	丑
黄 钟	大 吕	太 簇	夹 钟	姑 洗	仲 吕	蕤 宾	林 钟	夷 则	南 吕	无 射	应 钟	黄 钟	大 吕
81	76	72	68	64	60	57	54	51	48	45	42		
(缪)										(和)			
↑										↑			
67.423868										42.6666667			

从表 23 可知，若以 81 为始发律数，三分损益法求各律，只有前五律（黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗）可以得到整数，其它都是带分数，《淮南子》律数将所有的带分数进行四舍五入，得出约数，从而简化了十二律之间的关系，呈现出不复杂整数的自然化局面，这是符合人类听觉审美要求的。令人不解的是，其它约数都合四舍五入的规律，只有应钟、夹钟两律却该入反舍，该舍反入，形成了如上所述的整数数列。

“四舍五入”是面对小数的形式所遵循的一种操作规则，古代不用小数形式而用带分数形式，此操作规则应表述为：所带的分数小于 $\frac{1}{2}$ 则舍，大于 $\frac{1}{2}$ 就入，如表中最后一栏的“约数”。但

《淮南子》律数中应钟、夹钟两数却没按此规则，是什么原因呢？

用律学的语言来解读以上这段文字，如果分段审视这些律数，我们将发现如下几种情况：

情况一：大吕至仲吕这五项律数，依次相差 4，且这五项都含因数 4，可把 4 作为公因数提取出去，从而揭示出，实际上这五项构成了更为简单的整数等差数列；倘若夹钟律数用 67 而不调整为 68，这段结构的等差趋匀性就被破坏了。仲吕至应钟这 7 项律数，依次相差 3，且这 7 项都含因数 3，可把 3 作为公因数提取出去，从而同样也揭示出，实际上这 7 项构成了更为简单的整数等差数列；倘若应钟律数用 43 而不调整为 42，它就不能参与被提取公因数的行列，这段等差数列就截短为 6 项。

表 24.

律吕名称	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
律数	81	76	72	68	64	60	57	54	51	48	45	42
律数差	5    4    4    4    4    3    3    3    3    3    3											
5 项提公因数 4	$4 \times (19 : 18 : 17 : 16 : 15)$											
7 项提公因数 3	$3 \times (20 : 19 : 18 : 17 : 16 : 15 : 14)$											

观察提去公因数之后显露的数列，可见到，两段数列的结构有很高程度的一致性，5 项数列的数理结构能完完整整地被包含在 7 项数列的数理结构之内。倘若夹钟律数用 67 而不调整为 68，结构的逻辑贯通性就丧失了，结构的美也就受到伤害。这更进一步表明，夹钟律数的调整是十分必要的。至于应钟律数的调整带来更多的裨益，下文将予以揭示。

可见，违反四舍五入规则的律数调整有维护简单整数等差数列、增强逻辑贯通性、提高结构美的作用。至于《淮南子》作者是否意识到这些目标而有意为之，尚有待探究。






### 3. 《淮南子》律数内涵的乐律学能量

律数经过有意识地调整而形成的等差数列，为乐律学带来新元素，这就是以下要讨论的几种情况。

情况二：仲吕、无射两项律数都含因数 5，也就是说，这两律跟另外某些律之间存在着能以“五分五倍生律法”互相联结的关系，亦即纯律三、六度关系。这就告诉我们，当《淮南子》对律数取了约数以后，在某些场合就遇到了纯律音程。虽然我们不宜猜测该古籍作者是否有意要探索纯律，但我们可以断言，由于作者有意从大数转到约数，律学固有的数理就必然使某几处约数含有因数 5，因而遭遇纯律三、六度音程。不管作者是否意识到这一结果，纯律三、六度音程的实际萌生毕竟是逻辑的必然。

具体说来，这里萌生了哪些纯律三、六度音程呢？应该是无射与林钟、无射与太簇、仲吕与太簇、仲吕与南吕。

表 25.

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射
借用记谱									
律数	72			60		54		48	45
9 ×	( 8					6			5 )
12 ×	( 6			5				4 )	
360 ×	( $\frac{1}{5}$			$\frac{1}{6}$					$\frac{1}{8}$ )

在此能发现 3 个纯律的三和弦。为便于想象与理解，我们借用 d 小调的观念，设太簇对应于 d。提取公因数 9 的那行，可想象为 g（d 小调下属和弦）第二转位。提取公因数 12 的那行，可以想象为 d（d 小调主和弦）原位。提取公因数 360 而显示分数单位连比式的那行，可以想象为<sup>b</sup>b（d 小调Ⅵ级和弦）第一转位。

情况三：应钟律数含因数 7，它是 12 项律数中唯一含 7 的





一项。它跟某些律能结合成半减七和弦的第一转位。

在此先回忆前面提及的有关属七和弦与Ⅱ级七和弦的知识。波长连比式呈现为  $7:6:5:4$  的 4 个音律所构成的和弦形式，恰恰是谐音列第 4 至 7 号音（波长连比式呈现为  $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{7}$ ）所构成和弦的倒映形式。查谐音列结构可知，第 4 至 7 号谐音构成属七和弦（4 号与 7 号，根音与七音，相距“自然七度”），它的倒映形式就是半减七和弦。大家知道，自然小调Ⅱ级七和弦正是半减七和弦，例如 a 小调的Ⅱ级七和弦由  $b \quad d^1 \quad f^1 \quad a^1$  构成。在此，根音与七音，7 倍波与 4 倍波，同样相距“自然七度”。当这和弦作第一转位时，波长连比式呈现为什么样式呢？

$$\begin{array}{rcl}
 \text{原 位} & 7 & : \quad 6 \quad : \quad 5 \quad : \quad 4 \\
 \text{第一转位} & & 6 \quad : \quad 5 \quad : \quad 4 \quad : \quad \frac{7}{2} \\
 & = & 12 \quad : \quad 10 \quad : \quad 8 \quad : \quad 7
 \end{array}$$

《淮南子》所述的太簇、仲吕、南吕、应钟 4 项律数，恰能构成这一形式。我们借用“a 小调的Ⅱ级七和弦的第一转位”这一观念，很容易想象并理解。

表 26.

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
借用记谱										
律数	72			60				48		42
$6 \times ($	12			10				8		7)





倘若应钟律数用 43 而不调整为 42，这样顺乎自然的结构就不可能建立了。



情况四：夹钟、夷则两项律数，都含因数 17。在律数里出现这种因数，不仅超越了琴律所涉及的所有生律法（五分五倍生律法、七倍生律法），与欧洲的和声学、律学研究进程相比，这律数也是大大超前的。公元 1 世纪时，古希腊著名数学家、天文学家托勒密在《谐和论》中也提到了  $18:17$ ，并被 9 世纪时阿拉伯学者法拉比描述为半音。欧洲近代曾经有过用律学方法建设和声学基础理论的辉煌时期，但 17 这个因数却从未在和声学理论研究中出现，至今还不能发现它的踪影。在中国当代和声学论著中，关于因数 17 的论述出现于 20 世纪 70 年代末至 80 年代初<sup>①</sup>。而在我国古代律学典籍中，竟于公元前的西汉就出现了这个因数，为今天的律学、和声学准备好了材料。

含因数 17 的律数有什么样的可能参与和弦构成呢？若把表 26 内的南吕（48）换成夷则（51），将得到一个波长连比式并不复杂的减七和弦的第二转位。见到这连比式时，仍不要忘记，唯有在应钟律数为 42 的前提下，才可能得以约简；倘若应钟律数用 43 而不调整为 42，这样的约简就无法进行了。

表 27.

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
借用记谱										
律数	72			60			51			42
$3 \times ($	24			20			17			14)

<sup>①</sup> 赵宋光，《关于减七、增六和弦的功能的争议》，参加 1979 年第一届全国和声学学术报告会论文，见《和声学学术报告会》论文汇编，湖北艺术学院（现武汉音乐学院）和声学学术报告会办公室编，1979 年 10 月，第 372~389 页。《数在音乐表现手段中的意义》，《美学》第五辑第 179~199 页，1983 年出版，后收入《赵宋光文集》。





如果把这第二转位恢复到原位，将能见到：

$$\begin{array}{rcl}
 \text{第二转位} & & 24 : 20 : 17 : 14 \\
 \text{原 位} & 34 : 28 : 24 : 20 & \\
 & = 17 : 14 : 12 : 10 & 
 \end{array}$$

这是谐音列第 10、12、14、17 号四个音所构成的减七和弦的倒映形式。十二平均律对这两种互倒结构的模拟仿制，令我们难以觉察到两者的区别，使减七和弦的功能解释成为和声学理论中聚讼已久的难题。律学才是解开这一死结的理论工具。

情况五：大吕、蕤宾两项律数，都含因数 19。这是又一个超前了两千年出现的律学因子。含因数 19 的律数有什么样的可能参与和弦构成呢？找到前表所列的 d 小调和弦，把根音太簇（72）换成大吕（76），将得到一个增三和弦，它的波长连比式也不复杂。

表 28.

律吕名称	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕
借用记谱										
律数		76				60				48
4 × (		19				15				12)

这是谐音列第 12、15、19 号三个音所构成的增三和弦的倒映形式。这结构涉及和声学理论中增三和弦功能解释的难题。《淮南子》律数的启示正在推动当代中国学者用律学方法解开它。<sup>①</sup>

<sup>①</sup> 在《数在音乐表现手段中的意义》一文中，第一次正式对增三和弦的来源进行理论解释。见《赵宋光文集》第二卷第 76 页。

#### 4. 《淮南子》律数的律学意义与思想价值

《淮南子》律数反映出的律学意义有：（1）最早明确提出黄钟长度为九寸；最早从 81 起推算十二律相生之数；最早定出黄钟大数 177147，才可以求出其他各律的整数比例；最早指出七声所应之律。（2）开辟了整数自然化的局面，简化了十二律的关系。（3）追求等差数列但不盲目强求将十二律吕全体纳入单一等差数列（因为自然法则规定了八度之间真数所构成的单一等差数列不合自然音阶）。（4）出现了纯律数据。（5）出现了超越纯律理论的律学因子。《淮南子》律数由于朴素的跃迁而产生了超越各种传统规则的数理关系。<sup>①</sup>

虽然《淮南子》律数最初的起始点是用三分损益法生律，但它不拘一格、灵活变通的跃迁所产生的结果却是对自然律的应和。先秦及以后的律学探索大多都是围绕三分损益法和三分损益律，《淮南子》律数却有着新鲜生动的、对民间纯律实践的理性思维，它能够打破三分损益律的窠臼，立足于自然数，其间体现出的数理逻辑，绝不仅仅是巧合可以解释的。

以往，在任何律学讨论的著作、专论中，《淮南子》律数给我们提供的诸多可能性并没有被充分认识到。在运用现代律学分析手段剖析出《淮南子》律数中的更多信息后，我们知道，《淮南子》律数所涉及的律制领域不仅超出了三分损益律，具有纯律因素，而且启迪了超越传统律学思维的更多的可能性。虽然在汉族音乐实践中，以往没有这样的运用，但《淮南子》律数所体现的律制体系已经具备了解释这种音乐实践的能力。《淮南子》在趋匀观念的引导下，追求整数的自然化局面，因而朴素地产生了

---

<sup>①</sup> “跃迁”此处指《淮南子》律数从大数到约数的转变以及为维护等差数列所作的调整。

纯律因素和展示出音乐更深层的数理规律，这是毋庸置疑的。《淮南子》律数对于较复杂的和弦结构暗示了新的理解，可以为今后和声功能理论研究开辟新的领域。

## 二、《史记·生钟分》智慧的表述体系

《史记·生钟分》（司马迁，公元前 163～前 85 年）中记载了一个具有极高价值的律学成果，但这一智慧结晶却鲜被注意：

子一分，丑三分二，寅九分八，卯二十七分十六，辰八十一分六十四，巳二百四十三分一百二十八，午七百二十九分五百一十二，未二千一百八十七分一千二十四，申六千五百六十一分四千九十六，酉一万九千六百八十三分八千一百九十二，戌五万九千四十九分三万二千七百六十八，亥十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六。<sup>①</sup>

用律学的语言来解读这段文字：文中每一个序数可以与律吕名对应，并借用现代唱名对应传统律名，序数后的分数（“三分二”、“九分八”等）转换成表中的相对波长，并根据这些已经给定的数据分解出生律方向。

表 29.

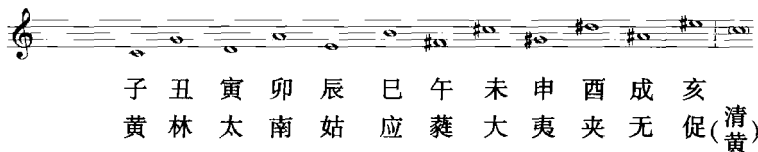
借用现代唱名	律吕名	生律序数	相对波长	生律法	交替相生	质底幂积式
Do	黄钟	子	1			$=2^0 \cdot 3^0$
So	林钟	丑	$\frac{2}{3}$	$1 \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^1 \cdot 3^{-1}$

<sup>①</sup> 《史记·卷二十五·律书第三·生钟分》，《历代乐志律志校释》第 123～124 页。

Rai	太簇	寅	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$	上生	$=2^3 \cdot 3^{-2}$
La	南吕	卯	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9} \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^4 \cdot 3^{-3}$
Mi	姑洗	辰	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{27} \times \frac{4}{3}$	上生	$=2^6 \cdot 3^{-4}$
Ti	应钟	巳	$\frac{128}{243}$	$\frac{64}{81} \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^7 \cdot 3^{-5}$
Fei	蕤宾	午	$\frac{512}{729}$	$\frac{128}{243} \times \frac{4}{3}$	上生	$=2^9 \cdot 3^{-6}$
Di	大吕	未	$\frac{1024}{2187}$	$\frac{512}{729} \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^{10} \cdot 3^{-7}$
Sci	夷则	申	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{1024}{2187} \times \frac{4}{3}$	上生	$=2^{12} \cdot 3^{-8}$
Rui	夹钟	酉	$\frac{8192}{19683}$	$\frac{4096}{6561} \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^{13} \cdot 3^{-9}$
Li	无射	戌	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{8192}{19683} \times \frac{4}{3}$	上生	$=2^{15} \cdot 3^{-10}$
Min	仲吕	亥	$\frac{65536}{177147}$	$\frac{32768}{59049} \times \frac{2}{3}$	下生	$=2^{16} \cdot 3^{-11}$

谱例7. 借用五线谱记谱表示《史记·生钟分》的计算结果

校正值:(全音数)+.01+.02+.03+.04+.05+.06+.07+.08+.09+.10+.11+.12  
(音分数)+2 +4 +6 +8 +10+12+14+16+18+20+22+24



这个损益相间、蕤宾后下生的生律结果必然形成超出八度的排列,可另外参考《吕氏春秋》中的十二律位谱例。

这段文献的重要价值在于:

把黄钟(子)的长度设为1,其他各律(丑、寅……)的长度表述为分数。这种以1为出发点,在推算中不避开非整数的表

述形式，而有意识地用分母、分子的比值形式表述律数，开创了分数的表述方式。这样可以避免管、弦等粗略的物质手段的具体长度，专注于数理规定性，客观上径直指向后世才发现的波长的数理相对规定性，早在公元前2世纪就已揭示出相对波长的数理本质，然而这个重要方法却很少被人提及。<sup>①</sup> 明朱载堉对“生钟分”这节内容也是非常推崇；王光祈曾在他的《中国乐制发微》一文中对“生钟分”这段文字有所关注，赞扬其“替我们把中国古代音律制度详确保存起来”，但他对这则文献在声学律学方面所达到的高度并没有清楚的评价，而主要批评“未”项以下各律皆为半律，是颠倒误用了三分损益法。当然他也认为这只是微疵。<sup>②</sup>

《史记·生黄钟》还记录了换算黄钟振动体长度的办法：“（术）曰：以下生者，倍其实，三其法。以上生法，四其实，三其法。……置一而九三之以为法，[十一三之以为实；] 实如法，得长一寸；凡得九寸，命曰：黄钟之宫。”<sup>③</sup> 这是说以  $3^9 = 19683$  那数为一寸，九寸为黄钟， $9 \text{ 寸} \times 3^9 = 3^{11} = 177147$ ，则是黄钟实数。

### 三、京房六十律的理论价值及其他

和《史记》的时间相差不远的是《淮南子》律数及京房六十

---

① 赵宋光先生1998年在扬州大学中国文化研究所作专题讲座，专门讲解《管子》、《吕氏春秋》、《史记·生钟分》及《淮南子》诸文献中的律学部分，笔者是时正访学于该所，此内容根据本人笔记整理。对《淮南》律数的分段分析方法也是在那次讲座中提到的。

② 详见王光祈《中国乐制发微》，载《王光祈音乐论著选集》下册163~184；第177页。

③ 引自《历代乐志律志校释》之《史记·律书·生黄钟》，第127~128页。

律（京房，公元前 77～公元前 37 年）。

《淮南子》律数与京房六十律体现了律学研究发展的两个不同方向，一个是向着简的方向发展，使十二律之间呈不复杂整数的自然化局面（这一点已在上文详述），这种调整已经超出了三分损益法的规则；另一个是继续严格遵循三分损益法向着繁的方向发展，即多律的研究，这就是京房的六十律→钱乐之三百六十律。

近百年来，京房六十律和钱乐之三百六十律这两笔乐律学遗产，被公认为“封建糟粕”，京房六十律对数理逻辑进行理性思维的智能价值并没有得到真正充分体认。甚至在缪先生最新版的《律学》<sup>①</sup>一书中，也只是说有科学价值，可供律学研究之用，认为何承天等人的新律研究才是真正发展之路。

### 1. 京房六十律的内容与方法

京房六十律自身的逻辑结构与音乐艺术日常习用的音律规定性有着数理的内在联系，这种逻辑是客观存在的，它能被音律科学的理性思维所发现，这是历史的必然，而这发现早在公元前 1 世纪至公元 5 世纪完成，在世界文化史上也属遥遥领先。这个发现所激起的“理性思维的反弹力，也曾推动何承天、朱载堉等对均匀律制的顽强不息、精益求精的探索，成为中华文化能以赢得十二平均律首创权的隐伏驱动力之一。”<sup>②</sup>

《后汉书·律历志·律术》中对京房六十律的生律记载：

黄钟，律吕之首，而生十一律者也。其相生也，皆三分而损益之。是故十二律之得十七万七千一百四十七，是为黄钟之实。又以二乘而三约之，是为下生林钟

① 缪天瑞先生《律学》，人民音乐出版社 1996 年北京第 1 版。

② 引自《一笔恼人遗产的松快清理》，《赵宋光文集》第 359 页。

之实。又以四乘而三约之，是为上生太簇之实。推此上下，以定六十律之实。以九三之，得万九千六百八十三为法。于律为寸，于准为尺。不盈者十之，所得为分。又不盈十之，所得为小分。以其余正其强弱。<sup>①</sup>

这段话表明京房的基本方法仍是用三分损益法，以“黄钟之实” $3^{11}=177147$ 开始，依次三分损益相生而得其他各律，各律得三种数据：①实数（即大数）；“以九三之，得万九千六百八十三为法”，大数除以 $3^9=19683$ <sup>②</sup>得②律数，以寸为单位；③弦准上的振动长度，以尺为单位。

京房首次明确表达了“竹声不可度调”的认识，并因此制作了定律器“准”，形如瑟，长一丈，张十三条弦，有效弦长为九尺。这种用弦律器研究律学的先例，对后世的律学探索产生了深远影响。他对每一律计算出三种数据，首先从黄钟大数出发，交替三分损益法相生得出十二律各律的实数；再以“九三之为法”求出律数，以寸、分、小分（厘）为单位，除不尽时用强或弱表示；弦长，以尺、寸为单位，余数照录。比如有这段文字：

色育，十七万六千七百七十六。下生谦待。色育为宫，未知商，谦待微。六日。律，八寸九分小分八微强。准，八尺九寸万五千九百七十三。

这段文字的意思是“色育”大数 176776 除以 19683，得商数 8.98 略有余，故称律数为“八寸九分小分八微强”，以商数 8.9 尺为弦准长度还有余数 15973。这类数据可在表 30 中查到，只是在小数点后多保留一位，使原来表述为“强”、“弱”、“微

① 《后汉书·卷九十一·律历志上》，《二十五史》，上海古籍出版社。

② 这种方法最早记载于《史记·律书·生黄钟》中，原文为“置一而九三之以为法。得长一寸。凡得九寸，命曰黄钟之宫。”



强”、“大强”、“半强”或“半弱”、“微弱”及余数照录的方法有更精确的律学表述。

但用三分损益法生到 12 次，得到的第 13 律，并不是理想地回到出发点，而是“微小音差”的累积（为了计算方便，将其称为“元差”，借用代号 $\Delta$ ，表示  $0.009775$  全音 $\approx 0.01$  全音 $=2$  音分。每相生一次增加一个“元差”—— $\Delta$ ，相生  $n$  次，即增加  $n\Delta$ 。将“元差”代入计算公式，可以简化计算）<sup>①</sup>，高出  $0.1173\approx 0.12$  全音（24 音分），即“古代音差”。每生一批 12 律都高出一个古代音差，这样一批一批地继续生律，原有的大半音、小半音就被分割成若干份古代音差，大半音约可分为 5 个，小半音约可分为 4 个，但最后一个都不足一个古代音差。

京房确认由仲吕生出高于黄钟一个古代音差的新生律有别于黄钟，因此另外命名为“执始”。

古代音差的音程系数除了可用在“三分损益律”一节中介绍的方法计算外，还可以由“黄钟相对波长：执始相对波长”算出。

执始的相对波长为：

$$\begin{array}{ccc} \text{仲吕} & \text{三分益一} & \text{生执始} \\ 2^{17} \cdot 3^{-11} & \times \frac{4}{3} & = 2^{19} \cdot 3^{-12} \end{array}$$

古代音差的音程系数即执始相对波长的倒数为：

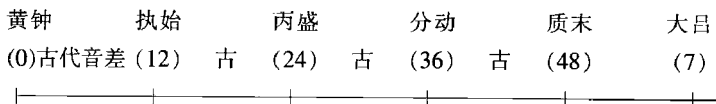
$$3^{12} \cdot 2^{-19} = \frac{531441}{524288}$$

黄钟至大吕这个大半音之间被古代音差分割成五份，也就是说插入了 4 个新的律位，这 4 个律位是每生一批 12 律而产生的，

<sup>①</sup> “元差”作为计算因子，最早见于赵宋光文《一笔恼人遗产的松快清理》，详见《音乐研究》1993 年第 3 期，第 57～68 页。

所以生律编号必分别各差 12, 京房给它们命名为执始 (12)、丙盛 (24)、分动 (36)、质末 (48)。

图 8. 大半音 (黄钟→大吕) 被古代音差划分的图式



当大半音被分割出 4 个古代音差后, 剩下的“质末”到“大吕”的那段是什么呢? 我们可以先算出它的音程值:

$$\begin{aligned}
 & \text{大半音} - [4 \times (\text{古代音差})] \\
 &= [0.5 + 7\Delta] - [4 \times 12\Delta] \\
 &= 0.5 - 41\Delta = 0.5 - 0.400775 = 0.099225 \text{ (全音)} \\
 &= 19.845 \text{ (音分)} \approx 20 \text{ 音分}
 \end{aligned}$$

这段不足一个古代音差的音程留待详究, 我们换个角度来看问题: 大半音被古代音差划分为五份, 但又不足 5 个古代音差。那么, 5 个古代音差比大半音大多少呢?

$$\begin{aligned}
 & [5 \times 12\Delta] - [0.5 + 7\Delta] = 53\Delta - 0.5 = 0.518075 - 0.5 \\
 &= 0.018075 \text{ (全音)} = 3.615 \text{ (音分)}
 \end{aligned}$$

这个微小音差非常重要, 从它所包含的 53 个“元差”, 我们可以判断出它就是第 53 次生律而得的第 54 律与出发律黄钟的差距, 就是著名的“京房微差”。<sup>①</sup> 京房的推算已经涉及到这个微差, “六十律”中最后七律 (色育均七音) 跟最初七律 (黄钟均七音) 的间距都是这个微差。由于有了“生律编号”和“质底幂积”作为分析工具, 我们已经提前把这个微差找出来了, 这便是

<sup>①</sup> “京房微差”这个命名最初由王光祈提出, 他称为“京氏音差”(京氏 komma), 给出的全音数为  $0.01781 \approx 3.562$  音分。详见《东西乐制之研究·乙编 中国》, 载《王光祈音乐论著选集》下册第 24~88 页: 43。

逻辑分析的功效以及现代律学对古代传统律学的超越。

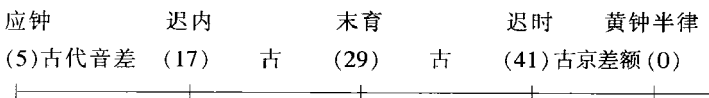
大半音减去 4 个古代音差后剩余的那部分，与古代音差之间的差数也正是这个微差：

$$0.1173 - 0.099225 = 0.018075 \text{ (全音)} = 3.615 \text{ (音分)}$$

反过来说，那段剩余部分就是“古代音差”与“京房微差”的差额。这样，我们就可以将那一段命名为“古京差额”。<sup>①</sup>

我们已经知道小半音（应钟→黄钟半律）比大半音正好小一个古代音差，小半音被古代音差划分的图式为：

图 9. 小半音（应钟→黄钟半律）被古代音差划分的图式：



虽然京房六十律以 60 掩盖了 53 的价值，但京房本人对以 53 律能划分成区间大致均匀的音律阶梯这一事实是有明确认识的。他已经意识到最初七律（黄钟均七音）与最后七律（色育均七音）间距特别小<sup>②</sup>，这个间距是生律 53 次所得到的第 54 律跟首律的差距，比出发律高约 0.02 全音，京房将这一律称为“色育”。在上文中已经提到五度相生（三分损益生律、三分三倍生律）十二律把八度分为 5 个大半音和 7 个小半音，现在各自划分的结果总和就是： $5 \times 5 + 7 \times 4 = 53$ ；而大半音和小半音被划分为若干个古代音差后，中间还间插着若干个古京差额，即每隔四份或三份连续的古代音差之后就会有一个古京差额，总体上有 41 个古代音差和 12 个古京差额，形成了 53 个大致均匀的音律阶梯。

① 详见赵宋光文《一笔恼人遗产的松快清理》。见其文集第 378 页。

② 这从他对“分葍之日”的划分可以看出。

古京差额的音程系数由“大半音的音程系数÷（古代音差的音程系数）<sup>4</sup>”算出：

$$(3^7 \cdot 2^{-11}) \div (3^{12} \cdot 2^{-19})^4 = 3^{-41} \cdot 2^{65}$$

古京差额的音程值可由音程系数求得：

$$\begin{aligned} \log(3^{-41} \cdot 2^{65}) &= -41\log 3 + 65\log 2 \\ &= -41 \times (9.5 + \triangle) + 65 \times 6 = 0.5 - 41\triangle \\ &= 0.099225 \text{ 全音} \\ &= 19.845 \text{ 音分} \approx 20 \text{ 音分} \end{aligned}$$

京房微差的音程系数由“黄钟相对波长÷色育相对波长”算出。

色育相对波长=应钟相对波长×（古代音差音程系数的倒数）<sup>4</sup>×八度音程系数

$$= (3^{-5} \cdot 2^7) \times (3^{12} \cdot 2^{-19})^4 \times 2 = 3^{-53} \cdot 2^{84}$$

色育的相对音高可由这个相对波长求得：

$$\begin{aligned} -\log(3^{-53} \cdot 2^{84}) &= -[-53\log 3 + 84\log 2] \\ &= -[-53 \times (9.5 + \triangle) + 84 \times 6] = 53\triangle - 0.5 \\ &= 0.018075 \text{ 全音} = 3.615 \text{ 音分} \end{aligned}$$

京房微差的音程系数就是色育相对波长的倒数，即  $3^{53} \times 2^{-84}$ 。

在第54律出现之前，八度被53律划分为大致均匀的两种音程，即古代音差和古京差额。

## 2. 京房的数据及严密的逻辑

现将《后汉书·律历志·律术》所载京房六十律按相生顺序编列下表：

表 30.

生律编号 律名	(0) 黄钟	(1) 林钟	(2) 太簇	(3) 南吕	(4) 姑洗	(5) 应钟	(6) 蕤宾
相对波长	$2^0 \cdot 3^{-0}$	$2^1 \cdot 3^{-1}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$
振动体长度 (以寸为单位)	9 寸	6 寸	8 寸	5.333 寸	7.111 寸	4.741 寸	6.321 寸
相对音高 (全音数)	0	3.51	1.02	4.53	2.04	5.55	3.06
生律编号 律名		(7) 大吕	(8) 夷则	(9) 夹钟	(10) 无射	(11) 仲吕	
相对波长		$2^{11} \cdot 3^{-7}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	
振动体长度 (以寸为单位)		8.428 寸	5.619 寸	7.492 寸	4.994 寸	6.659 寸	
相对音高 (全音数)		0.57	4.08	1.59	5.10	2.61	
生律编号 律名	(12) 执始	(13) 去灭	(14) 时息	(15) 结射	(16) 变虞	(17) 迟内	(18) 盛变
相对波长	$2^{19} \cdot 3^{-12}$	$2^{20} \cdot 3^{-13}$	$2^{22} \cdot 3^{-14}$	$2^{23} \cdot 3^{-15}$	$2^{25} \cdot 3^{-16}$	$2^{26} \cdot 3^{-17}$	$2^{28} \cdot 3^{-18}$
振动体长度 (以寸为单位)	8.879 寸	5.919 寸	7.892 寸	5.261 寸	7.015 寸	4.677 寸	6.236 寸
相对音高 (全音数)	0.12	3.63	1.14	4.65	2.16	5.67	3.18
生律编号 律名		(19) 分否	(20) 解形	(21) 开时	(22) 闭掩	(23) 南中	
相对波长		$2^{30} \cdot 3^{-19}$	$2^{31} \cdot 3^{-20}$	$2^{33} \cdot 3^{-21}$	$2^{34} \cdot 3^{-22}$	$2^{36} \cdot 3^{-23}$	
振动体长度 (以寸为单位)		8.314 寸	5.543 寸	7.391 寸	4.927 寸	6.569 寸	
相对音高 (全音数)		0.69	4.20	1.71	5.22	2.73	

生律编号 律名	(24) 丙盛	(25) 安度	(26) 屈齐	(27) 归期	(28) 路时	(29) 未育	(30) 离宫
相对波长	$2^{38} \cdot 3^{-24}$	$2^{39} \cdot 3^{-25}$	$2^{41} \cdot 3^{-26}$	$2^{42} \cdot 3^{-27}$	$2^{44} \cdot 3^{-28}$	$2^{45} \cdot 3^{-29}$	$2^{47} \cdot 3^{-30}$
振动体长度 (以寸为单位)	8.759 寸	5.839 寸	7.786 寸	5.1907 寸	6.921 寸	4.614 寸	6.152 寸
相对音高 (全音数)	0.23	3.75	1.25	4.77	2.27	5.78	3.29
生律编号 律名		(31) 凌門	(32) 去南	(33) 族嘉	(34) 邻齐	(35) 内负	
相对波长		$2^{49} \cdot 3^{-31}$	$2^{50} \cdot 3^{-32}$	$2^{52} \cdot 3^{-33}$	$2^{53} \cdot 3^{-34}$	$2^{55} \cdot 3^{-35}$	
振动体长度 (以寸为单位)		8.202 寸	5.468 寸	7.291 寸	4.861 寸	6.481 寸	
相对音高 (全音数)		0.80	4.31	1.82	5.33	2.84	
生律编号 律名	(36) 分动	(37) 归嘉	(38) 随期	(39) 未卯	(40) 形始	(41) 迟时	(42) 制时
相对波长	$2^{57} \cdot 3^{-36}$	$2^{58} \cdot 3^{-37}$	$2^{60} \cdot 3^{-38}$	$2^{61} \cdot 3^{-39}$	$2^{63} \cdot 3^{-40}$	$2^{64} \cdot 3^{-41}$	$2^{66} \cdot 3^{-42}$
振动体长度 (以寸为单位)	8.641 寸	5.7609 寸	7.682 寸	5.121 寸	6.828 寸	4.552 寸	6.069 寸
相对音高 (全音数)	0.35	3.86	1.37	4.88	2.39	5.90	3.41
生律编号 律名		(43) 少出	(44) 分积	(45) 争南	(46) 期保	(47) 物应	
相对波长		$2^{68} \cdot 3^{-43}$	$2^{69} \cdot 3^{-44}$	$2^{71} \cdot 3^{-45}$	$2^{72} \cdot 3^{-46}$	$2^{74} \cdot 3^{-47}$	
振动体长度 (以寸为单位)		8.092 寸	5.395 寸	7.193 寸	4.795 寸	6.394 寸	
相对音高 (全音数)		0.92	4.43	1.94	5.45	2.96	

生律编号 律名	(48) 质末	(49) 否与	(50) 形晋	(51) 夷汗	(52) 依行		
相对波长	$2^{76} \cdot 3^{-48}$	$2^{77} \cdot 3^{-49}$	$2^{79} \cdot 3^{-50}$	$2^{80} \cdot 3^{-51}$	$2^{82} \cdot 3^{-52}$		
振动体长度 (以寸为单位)	8.525 寸	5.683 寸	7.578 寸	5.052 寸	6.736 寸		
相对音高 (全音数)	0.47	3.98	1.49	5.00	2.51		
生律编号 律名	(53) 色育	(54) 谦待	(55) 未知	(56) 白吕	(57) 南授	(58) 分乌	(59) 南事
相对波长	$2^{84} \cdot 3^{-53}$	$2^{85} \cdot 3^{-54}$	$2^{87} \cdot 3^{-55}$	$2^{88} \cdot 3^{-56}$	$2^{90} \cdot 3^{-57}$	$2^{91} \cdot 3^{-58}$	$2^{93} \cdot 3^{-59}$
振动体长度 (以寸为单位)	8.981 寸	5.987 寸	7.983 寸	5.322 寸	7.096 寸	4.731 寸	6.308 寸
相对音高 (全音数)	0.02	3.53	1.04	4.55	2.06	5.57	3.08

在表 30 中,从生律编号可以看出其中的规律,左边第一纵列五个音、右边第一纵列五个音,上下相邻两音各自相隔 12 次生律,中间五个纵列中,每列上下相邻两音各自相隔 6 次生律。最后一行(生律编号为 53~59)与第一行对齐(生律编号为 0~6),两行中纵对齐的两律各自相差一个“京房微差”。

从京房在各律名下都附注“分菴之日”可以得知,他已经发现了在前 53 律形成了大致均匀的音律阶梯。虽然他发表的律制是“六十律”,但他本人很清楚最后 7 律(从色育开始的 7 律)的出现反而造成八度内的明显不均匀。

现在根据《后汉书·律历志·律术》所载京房六十律的高低顺序列出下表:

表 31. (全音数保留小数点后 2 位)

黄钟均	律序	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	相邻音差
	律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	
	相对波长	$2^0 \cdot 3^{-0}$	$2^1 \cdot 3^{-7}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$	$2^2 \cdot 3^{-1}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	
色育均	律序	0	0.57	1.02	1.59	2.04	2.61	3.06	3.51	4.08	4.53	5.10	5.55	京房音差
	律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	
	相对波长	$2^0 \cdot 3^{-0}$	$2^1 \cdot 3^{-7}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$	$2^2 \cdot 3^{-1}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	
执始均	律序	53	55	未知	57	南授	南授	南事	南事	南事	南事	南事	南事	京房音差
	律名	色育	未知	未知	南授	南授	南授	南事	南事	南事	南事	南事	南事	
	相对波长	$2^{84} \cdot 3^{-53}$	$2^{87} \cdot 3^{-55}$	$2^{90} \cdot 3^{-57}$	$2^{93} \cdot 3^{-59}$	$2^{96} \cdot 3^{-61}$	$2^{99} \cdot 3^{-63}$	$2^{102} \cdot 3^{-65}$	$2^{105} \cdot 3^{-67}$	$2^{108} \cdot 3^{-69}$	$2^{111} \cdot 3^{-71}$	$2^{114} \cdot 3^{-73}$	$2^{117} \cdot 3^{-75}$	
执始均	律序	12	14	14	21	16	23	18	13	20	15	22	17	京房音差
	律名	执始	时息	时息	开时	变虞	南中	盛变	去灭	解形	结躬	闭掩	迟内	
	相对波长	$2^{19} \cdot 3^{-12}$	$2^{22} \cdot 3^{-14}$	$2^{25} \cdot 3^{-16}$	$2^{28} \cdot 3^{-18}$	$2^{31} \cdot 3^{-20}$	$2^{34} \cdot 3^{-22}$	$2^{37} \cdot 3^{-24}$	$2^{40} \cdot 3^{-26}$	$2^{43} \cdot 3^{-28}$	$2^{46} \cdot 3^{-30}$	$2^{49} \cdot 3^{-32}$	$2^{52} \cdot 3^{-34}$	
丙盛均	律序	24	26	26	33	28	35	30	25	32	27	34	29	古代音差
	律名	丙盛	屈齐	屈齐	族嘉	跨时	内负	离宫	安度	去南	归期	邻齐	未育	
	相对波长	$2^{38} \cdot 3^{-24}$	$2^{41} \cdot 3^{-26}$	$2^{44} \cdot 3^{-28}$	$2^{47} \cdot 3^{-30}$	$2^{50} \cdot 3^{-32}$	$2^{53} \cdot 3^{-34}$	$2^{56} \cdot 3^{-36}$	$2^{59} \cdot 3^{-38}$	$2^{62} \cdot 3^{-40}$	$2^{65} \cdot 3^{-42}$	$2^{68} \cdot 3^{-44}$	$2^{71} \cdot 3^{-46}$	
丙盛均	律序	0.23	1.25	1.25	1.82	2.27	2.84	3.29	3.75	4.31	4.77	5.33	5.78	古代音差
	律名	丙盛	屈齐	屈齐	族嘉	跨时	内负	离宫	安度	去南	归期	邻齐	未育	
	相对波长	$2^{38} \cdot 3^{-24}$	$2^{41} \cdot 3^{-26}$	$2^{44} \cdot 3^{-28}$	$2^{47} \cdot 3^{-30}$	$2^{50} \cdot 3^{-32}$	$2^{53} \cdot 3^{-34}$	$2^{56} \cdot 3^{-36}$	$2^{59} \cdot 3^{-38}$	$2^{62} \cdot 3^{-40}$	$2^{65} \cdot 3^{-42}$	$2^{68} \cdot 3^{-44}$	$2^{71} \cdot 3^{-46}$	



分	律序	律名	相对波长	36 分动	43 少出	38 随期	45 争南	40 形始	47 物应	42 制时	37 归嘉	44 分积	39 未卯	46 期保	41 延时	音差
动	均	音高	日数	$2^{57} \cdot 3^{-36}$	$2^{68} \cdot 3^{-43}$	$2^{60} \cdot 3^{-38}$	$2^{71} \cdot 3^{-45}$	$2^{63} \cdot 3^{-40}$	$2^{74} \cdot 3^{-47}$	$2^{86} \cdot 3^{-42}$	$2^{38} \cdot 3^{-37}$	$2^{69} \cdot 3^{-44}$	$2^{61} \cdot 3^{-39}$	$2^{72} \cdot 3^{-46}$	$2^{64} \cdot 3^{-41}$	古代音差
				0.35	0.92	1.37	1.94	2.39	2.96	3.41	3.86	4.43	4.88	5.45	5.90	
质	末	音高	日数	48 质末		50 形晋		52 依行			49 否与		51 袁汗			古代音差
				$2^{76} \cdot 3^{-48}$		$2^{79} \cdot 3^{-50}$		$2^{82} \cdot 3^{-52}$			$2^{77} \cdot 3^{-49}$		$2^{80} \cdot 3^{-51}$			
分	青	之	日	0.47		1.49		2.51			3.98		5.00			古代音差
				6		6		7			5		7			
分	青	之	日	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	累积天数	古代音差
				31	30	31	30	31	30	30	30	31	31	31	30	

最后生出的七律所构成的色育均虽然使六十律反倒不均匀了，但同时也因为对黄钟均可以进行整体移位一个京房微差，提供了变换音律的最小幅度以及生律来由，而且暗示出可预见到的继续相生结果。

京房将一年 366 天分配给六十律，每律掌管一至八天，第一批 12 律（黄钟均），每律统领一月，共合 12 月。

现在可以描述大半音、小半音、古代音差、古京差额和京房微差的特征，并根据生律编号及元差换算出音程值：

以黄钟→大吕为大半音模型，生律编号相差 7，高者为大。

$$\begin{aligned}\text{音程值: } 0.5 + 7\Delta &= 0.5 + 7 \times 0.009775 = 0.568425 \text{ (全音)} \\ &= 113.685 \text{ (音分)}\end{aligned}$$

以大吕→太簇为小半音模型，生律编号相差 5，低者为大。

$$\begin{aligned}\text{音程值: } 0.5 - 5\Delta &= 0.5 - 5 \times 0.009775 = 0.451125 \text{ (全音)} \\ &= 90.225 \text{ (音分)}\end{aligned}$$

以黄钟→执始为“古代音差”模型，生律编号相差 12，高者为大。

$$\begin{aligned}\text{音程值: } 12\Delta &= 12 \times 0.009775 = 0.1173 \text{ (全音)} \\ &= 23.46 \text{ (音分)}\end{aligned}$$

以质末→大吕为“古京差额”模型，生律编号相差 41，低者为大。

$$\begin{aligned}\text{音程值: } 0.5 - 41\Delta &= 0.5 - 41 \times 0.009775 \\ &= 0.099225 \text{ (全音)} = 19.845 \text{ (音分)}\end{aligned}$$

以黄钟→色育为“京房微差”模型，生律编号相差 53，高者为大。

$$\begin{aligned}\text{音程值: } 53\Delta - 0.5 &= 53 \times 0.009775 - 0.5 \\ &= 0.018075 \text{ (全音)} = 3.615 \text{ (音分)}\end{aligned}$$

根据这样的特征来检审纵向各律和横向各律，可以很容易判

断出相互之间的音程关系：从纵向看，黄钟均与色育均之间为京房微差；色育均与执始均之间、质末均与大吕均之间为古京差额；执始均与丙盛均之间、丙盛均与分动均之间、分动均与质末均之间为古代音差；从横向看，黄钟正律至黄钟半律之间，每相邻两律依次为大、小、大、小、大、小、小、大、小、大、小、小两种半音。

#### 四、钱乐之三百六十律

钱乐之（438年前后）在京房六十律的基础上继续用三分损益法生律，第359次生律得到第360律，他称之为“安运”。钱乐之在认识上并没有像京房那样清醒，他的三百六十律的不均匀性是从第306次生律得到的那一律“亿兆”就开始了。当生律第53次产生一个京房微差，以后每生一批53律都比前一批53律高出一个京房微差，他把41份古代音差和12份古京差额分割成若干份京房微差时，却总剩下半份京房微差。

我们仍以图式表示：

图 10. 古代音差被京房微差划分的图示

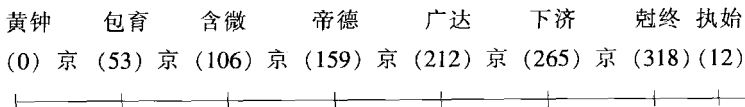
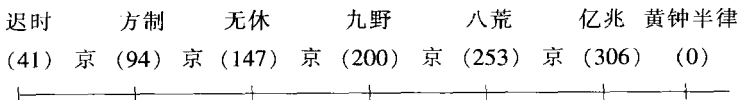


图 11. 古京差额被京房微差划分的图示



以上两个图示显示出古代音差被分割为6份京房微差后剩下一段，恰好是半段京房微差；古京差额被分割为5份京房微差后剩下一段，恰好也是半段京房微差。因为剩下的一段是京房微差的前半段，可以称为“半京甲”。

半京甲的音程系数可用“古代音差的音程系数 $\div$ (京房微差的音程系数)<sup>6</sup>”算出:

$$3^{12} \cdot 2^{-19} \div (3^{53} \cdot 2^{-84})^6 = 3^{-306} \cdot 2^{485}$$

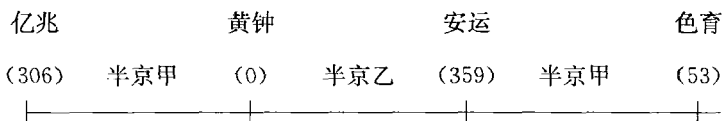
其音程值可由音程系数算出,也可用“古代音差 $-6 \times$ (京房微差)”算出:

$12\Delta - 6 \times (53\Delta - 0.5) = 3 - 306\Delta = 0.0089112$  (全音),  
即 1.78224 音分。

按以上两图示的划分样式,41份古代音差都被划分为6份京房微差和1份半京甲,12份古京差额都被划分为5份京房微差和1份半京甲,于是形成 $41 \times 6 + 12 \times 5 = 306$ 份京房微差,其中又插入 $41 + 12 = 53$ 份半京甲,共有359个不均匀的音律区间。钱乐之做了第359次生律,得到第三百六十律,他称之为“安运”,并安插在“应钟一部”。但该音实际已高于黄钟半律,位于黄钟半律与色育半律之间,并不属于“应钟部”。亿兆(306)至安运(359)之间的京房微差被黄钟半律分割了,那么黄钟半律(0)至安运之间的微差就是京房微差减去半京甲所剩的后半段,可以称为“半京乙”。

我们仍以图示来看半京乙的划分情况。

图 12. 黄钟至色育被划分为两部分的图示



半京乙的音程系数可用“京房微差的音程系数 $\div$ 半京甲的音程系数”算出:

$$(3^{53} \cdot 2^{-84}) \div (3^{-306} \cdot 2^{485}) = 3^{359} \cdot 2^{-569}$$

其音程值可由音程系数算出,也可用“京房微差的音程值 $-$ 半京甲的音程值”算出,它的数值等于正确落位(移低八度)安

运的相对音高：

$(53\triangle - 0.5) - (3 - 306\triangle) = 359\triangle - 3.5 = 0.0091532$  (全音)，即 1.83064 音分。

在图 12 中，我们看到第一次半京甲的产生是第 306 次生律得到亿兆，在亿兆至黄钟半律之间是一个半京甲，其特征为生律序号相差 306；第 318 次生律得到的尅终与第 12 次生律得到的执始，生律序号也相差 306。由此特征得知，安运与色育之间也是一个半京甲，这个特征已经凝结在音程系数中。半京乙的音程系数为  $3^{359} \cdot 2^{-569}$ ，从 3 底幂的指数也可以得到结论：两律的生律序号相差 359，从图 12 中，黄钟至安运的生律序号正是如此。

安运的出现把黄钟与色育之间的京房微差分成两半。这种多律的计算只有继续向前走，再生 306 律，把 306 个京房微差全部分成两半，于是，每两律都相距半段“京房微差”，如此，将形成全局统一的 665 律阶梯，才达到完全均匀。钱乐之在三百六十律上半途而止，所以他的计算结果没有获得应有的意义。赵宋光在《一笔恼人遗产的松快清理》一文中把三分损益法对八度音程的划分比作经历了三个里程碑：第一里程段，用三分损益法算出 12 律，把八度划分为大小半音、不严格均匀的音律阶梯；第二里程段，用三分损益法算出 53 律，把八度音程划分为古代音差和古京差额两种不严格均匀的音律阶梯；而只有继续生律到 665 律，才能到达第三个里程碑，达到完全均匀。当然，在古代乐律学史上，没有人达到过这个目标，我们用今天的数学方法，把握住这样的思维逻辑，很容易简明剖析京房六十律和钱乐之三百六十律的意义，了解其中的智能价值和不足，用逻辑的方法可以迅速达到第三个里程碑。同时，在生律法中，运用反生法，用 306 个反生音律把京房微差分成两半，将使各律相对波长所含指数的绝对值不再增大，各律相对音高所含“元差”( $\triangle$ )数目的绝对

值也不会再增大。而且，这样的做法弥补了三分损益法不认反生的缺陷。

在此强调，重要的不是记住以上提到的大量具体数据，而是我们所使用的抽象方法。那会令我们已有的知识更成倍地放射力量。

### 第三节

## 应用律学的成果——荀勖笛律

历史上，三分损益法在应用律学方面最值得一提的是晋代荀勖笛律（荀勖卒于 289 年）。

#### 一、荀勖管口校正数的计算方法

荀勖认为自汉魏以来，乐工作笛只知其声，不知所应何律，这与笛在殿堂之乐中的地位不相合宜。诸弦歌皆以笛为正，笛在丝竹乐中的地位犹如钟磬，所以乐工对统率调高的笛只停留在以长度“尺寸名之”，实在“俗而不典”。因此认为有依十二律制十二笛的必要。他命人依律做了大吕笛，校吹每孔一律共七律，都很准，以致于让协律中郎将列和慨叹：“自和父祖汉世以来，笛家相传，不知此法，而令调均与律相应，实非所及也。”<sup>①</sup> 依律

---

<sup>①</sup> 《晋书·卷十六·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社 1999 年 9 月北京第 1 版，第 17 页。

制作十二律笛，每换某均，执乐者就可以说“请奏某某”，比如“请奏黄钟”云云。

所谓“竹声不可度调”，是因为管内气柱振动时，气柱长度长于管的长度，也就是说，当吹响一支管时，气柱的一部分要突出在管口外。因此，要按照音的高度计算管的长度时，就要找出气柱长与管长之间的差数，这个差数就是管口校正的数据。

《晋书·卷十六·律志》“黄钟之笛，正声应黄钟，下徵应林钟，长二尺八寸四分四厘有奇。正声调法，以黄钟为宫，则姑洗为角，翕笛之声应姑洗，故以四角之长为黄钟之笛也。其宫声正而不倍，故曰正声。”<sup>①</sup>

这段文字记载的是荀勖制笛的方法，并从中可看出他寻找管口校正数的方法。荀勖在三分损益法的基础上，得出管口校正的数据与规律是：一支律管的长度与另一高四律（即宫、角两音）的律管长度的差数。

《晋书·卷十六·律志·五音十二律》列出了三分损益相生出十二律数的结果，为了排列出长短有序的十二律，有三律给出倍数。

十一月，律中黄钟，律之始也，长九寸。……

十二月，律中大吕，司马迁未下生之律，长四寸二百四十三分寸之五十二，倍之为八寸二百四十三分寸之一百四。……

正月，律中太簇，未上生之律，长八寸。……

二月，律中夹钟，酉下生之律，长三寸二千一百八十七分寸之一千六百三十一，倍之为七寸二千一百八十

<sup>①</sup> 《晋书·卷十六·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社 1999 年 9 月北京第 1 版，第 20 页。

七分寸之一千七十五。……

三月，律中姑洗，酉上生之律，长七寸九分寸之一。……

四月，律中仲吕，亥下生之律，长三寸万九千六百八十三分寸之六千四百八十七，倍之为六寸万九千六百八十三分寸之万二千九百七十四。……

五月，律中蕤宾，亥上生之律，长六寸八十一分寸之二十六。……

六月，律中林钟，丑下生之律，长六寸。……

七月，律中夷则，丑上生之律，长五寸七百二十九分寸之四百五十一。……

八月，律中南吕，卯下生之律，长五寸三分寸之一。……

九月，律中无射，卯上生之律，长四寸六千五百六十一分寸之六千五百二十四。……

十月，律中应钟，巳下生之律，长四寸二十七分寸之二十。……<sup>①</sup>

用清晰、逻辑的律学方法表达他的计算过程，应该是这样的：

黄钟律管 9 寸，高四律的姑洗律管为  $7\frac{1}{9}$  寸，二者的差数为  $9 - 7\frac{1}{9} = 1\frac{8}{9}$ ，折算为现代长度单位，这个差数 = 4.36118 厘米

<sup>①</sup> 《晋书·卷十六·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社 1999 年 9 月北京第 1 版，第 28~31 页。



≈4.3612 厘米<sup>①</sup>；由此，我们可以依次算出十二笛的管口校正数：

表 32.

律吕	律数 (×2.308864=cm)	高四律者律数	管口校正 (寸)	厘米
黄钟	9 寸=20.779776cm	姑洗 7 $\frac{1}{9}$ 寸	$9-7\frac{1}{9}=1\frac{8}{9}$	4.3612
林钟	6 寸=13.853184cm	应钟 4 $\frac{20}{27}$ 寸	$6-4\frac{20}{27}=1\frac{7}{27}$	2.90746
太簇	8 寸=18.470912cm	蕤宾 6 $\frac{26}{81}$ 寸	$8-6\frac{26}{81}=1\frac{55}{81}$	3.8766
南吕	5 $\frac{1}{3}$ 寸=12.3139413cm	大吕 8 $\frac{104}{243}$ 寸	$5\frac{1}{3}-8\frac{104}{243}\times\frac{1}{2}=1\frac{29}{243}$	2.584
姑洗	7 $\frac{1}{9}$ 寸=16.4185884cm	夷则 5 $\frac{451}{729}$ 寸	$7\frac{1}{9}-5\frac{451}{729}=1\frac{359}{729}$	3.4459
应钟	4 $\frac{20}{27}$ 寸=10.945726cm	夹钟 7 $\frac{1075}{2187}$ 寸	$4\frac{20}{27}-7\frac{1075}{2187}\times\frac{1}{2}=\frac{2176}{2187}$	2.29725
蕤宾	6 $\frac{26}{81}$ 寸=14.594300cm	无射 4 $\frac{6524}{6561}$ 寸	$6\frac{26}{81}-4\frac{6524}{6561}=1\frac{2143}{6561}$	3.063
大吕	8 $\frac{104}{243}$ 寸=19.459068cm	仲吕 6 $\frac{12974}{19683}$ 寸	$8\frac{104}{243}-6\frac{12974}{19683}=1\frac{15133}{19683}$	4.084
夷则	5 $\frac{451}{729}$ 寸=12.972712cm	黄钟 9 寸	$5\frac{451}{729}-9\times\frac{1}{2}=1\frac{173}{1458}$	2.583
夹钟	7 $\frac{1075}{2187}$ 寸=17.296949cm	林钟 6 寸	$7\frac{1075}{2187}-6=1\frac{1075}{2187}$	3.444
无射	4 $\frac{6524}{6561}$ 寸=11.5313cm	太簇 8 寸	$4\frac{6524}{6561}-8\times\frac{1}{2}=\frac{6524}{6561}$	2.29584
仲吕	6 $\frac{12974}{19683}$ 寸=15.37507cm	南吕 5 $\frac{1}{3}$ 寸	$6\frac{12974}{19683}-5\frac{1}{3}=1\frac{6413}{19683}$	3.06112

① 根据杨荫浏先生在《中国音乐史纲》一书中提供的数据，荀勖所用尺与晚周及刘歆尺相同，一尺合今 23.08864 厘米。《中国音乐史纲》，第 152 页及 155 页，1952 年，上海万叶书店出版。

## 二、荀勖十二笛及开孔数据

荀勖以所知的管口校正数制成 12 支笛子（直吹），以应十二律，又在各笛上开孔，可以吹全每均音阶。

以《晋书》中荀勖笛律的数据记载，我们首先可以求出黄钟笛的长度。

荀勖以 4 倍于姑洗律管长度作为黄钟笛的长度，因此可知：

$$\text{黄钟笛的长度} = 4 \times 7 \frac{1}{9} \text{寸} = 2.8444 \text{尺}$$

关于这个数据，荀勖的原话是“长二尺八寸四分四厘有奇”（“奇”意为“有余”），折算成现代长度单位为：

$$2.8444 \text{尺} \times 23.08864 = 65.67321384 \text{厘米}$$

从下面这段话我们可以知道他是如何求各笛长度及各音的开孔处：

正声调法，黄钟为宫。作黄钟之笛，将求宫孔，以姑洗及黄钟律，从笛首下度之，尽二律之长而为孔，则得宫声也。宫生徵，黄钟生林钟也。以林钟之律从宫孔下度之。尽律作孔，则得徵声也。徵生商，林钟生太簇也。以太簇律从徵孔上度之，尽律以为孔，则得商声也。商生羽，太簇生南吕也。以南吕律从商孔下度之，尽律为孔，则得羽声也。羽生角，南吕生姑洗也。以姑洗律从羽孔上行度之，尽律而为孔，则得角声也。然则于商孔之上，吹笛者左手所不及也。从羽孔下行度之，尽律而为孔，亦得角声，出于商附孔之下，则吹者右手所不逮也，故不作角孔。推而下之，复倍其均，是以角声在笛体中，古之制也。……角生变宫，姑洗生应钟也。上句所谓当为角孔而出于商上者，墨点识之，以应

钟律。从此点下行度之，尽律为孔，则得变宫之声也。

变宫生变徵，应钟生蕤宾也。以蕤宾律从变宫下度之，

尽律为孔，则得变徵之声。十二笛之制，各以其宫为

主，相生之法，或倍或半，其便事用，例皆一也。<sup>①</sup>

文中的“下度”即加某律之长度，“上度”则为减某律之长度。将这段话整理如下：

黄钟律长+姑洗律长=黄钟笛宫声孔位距吹口的长度（第五孔）

$$9\text{寸} + 7\frac{1}{9}\text{寸} = 16\frac{1}{9}\text{寸}$$

$$16\frac{1}{9}\text{寸} \times 2.308864 = 37.198364\text{厘米}$$

宫声孔位长度+林钟律长=黄钟笛徵声孔位长度（第二孔）

$$16\frac{1}{9}\text{寸} + 6\text{寸} = 22\frac{1}{9}\text{寸}$$

$$22\frac{1}{9}\text{寸} \times 2.308864 = 51.051548\text{厘米}$$

徵声孔位长度-太簇律长=黄钟笛商声孔位长度（背孔）

$$22\frac{1}{9}\text{寸} - 8\text{寸} = 14\frac{1}{9}\text{寸}$$

$$14\frac{1}{9}\text{寸} \times 2.308864 = 32.580636\text{厘米}$$

商声孔位长度+南吕律长=黄钟笛羽声孔位长度（第三孔）

$$14\frac{1}{9}\text{寸} + 5\frac{1}{3}\text{寸} = 19\frac{4}{9}\text{寸}$$

$$19\frac{4}{9}\text{寸} \times 2.308864 = 44.894578\text{厘米}$$

羽声孔位长度+姑洗律长=黄钟笛倍角声长度（笛长，闭孔）

① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第20～21页。

“角声在笛体中”)

$$19\frac{4}{9}\text{寸}+7\frac{1}{9}\text{寸}=26\frac{5}{9}\text{寸}$$

$$26\frac{5}{9}\text{寸}\times 2.308864=61.313166\text{厘米（这个数等于黄钟笛长}$$

减去管口校正数）

羽声孔位长度—姑洗律长=黄钟笛正角声长度

$$19\frac{4}{9}\text{寸}-7\frac{1}{9}\text{寸}=12\frac{1}{3}\text{寸}$$

$$12\frac{1}{3}\text{寸}\times 2.308864=28.475989\text{厘米}$$

角声长度+应钟律长=黄钟笛变宫声孔位长度（第四孔）

$$12\frac{1}{3}\text{寸}+4\frac{20}{27}\text{寸}=17\frac{2}{27}\text{寸}$$

$$17\frac{2}{27}\text{寸}\times 2.308864=39.421715\text{厘米}$$

变宫声孔位长度+蕤宾律长=黄钟笛变徵声孔位长度（第一孔）

$$17\frac{2}{27}\text{寸}+6\frac{26}{81}\text{寸}=23\frac{32}{81}\text{寸}$$

$$23\frac{32}{81}\text{寸}\times 2.308864=54.016016\text{厘米}$$

最后一句“十二笛之制，各以其宫为主，相生之法，或倍或半，其便事用，例皆一也”，介绍了十二笛都是以同一原理制成，各自开孔都是以各律作为宫音开始，上方角音所对应之律管长度的4倍作为笛长，如法相生，列表如下：

表 33. [表中各笛长度同时列出晋尺单位（以寸为单位的带分数）以及折算为现代长度单位（cm）]

十二律笛	各笛长度（尺）	合今长度（cm）	管口校正（cm）
黄钟之笛	2.8444	65.6744	4.3612
林钟之笛	3.792	87.5521	2.9075
太簇之笛	2.5284	58.3773	3.8766
南吕之笛	3.37119	77.8362	2.584
姑洗之笛	2.2474	51.8894	3.4459
应钟之笛	2.9966	69.1874	2.297
蕤宾之笛	3.995	92.239	3.063
大吕之笛	2.6636	61.4989	4.084
夷则之笛	3.6	83.119	2.5829
夹钟之笛	2.4	55.4127	3.444
无射之笛	3.2	73.8836	2.2958
仲吕之笛 <sup>①</sup>	2.133	49.2481	3.0611

① 据丘琼荪《历代乐志律志校释·第二分册·晋书律志》第26页注4云：仲吕笛，此志原本缺失，宋志亦脱漏，根据杨荫浏先生的《中国音乐史纲》一书（1952年，上海万叶书店）补校。杨先生没有列出他的计算方法，想必是以仲吕之角南吕律长 $5\frac{1}{3}$ 寸的4倍求出，也可以从无射之笛三尺二寸 $\times\frac{2}{3}$ （三分损一）求出。但《晋书·律志》中有一句很重要的话“或倍或半，或四分一，取则于琴徽也。”这说明荀勖在生律时不只限于三分生律，还运用了三倍生律的简便方法，从黄钟之笛 $2.844\times\frac{3}{4}=2.133$ 尺；而前两种方法则得到循环小数2.13333……

正声调法：黄钟为宫，第一孔也。应钟为变宫，第二孔也。南吕为羽，第三孔也。林钟为徵，第四孔也。蕤宾为变徵，第五附孔也。姑洗为角，笛体中声。太簇为商。笛后出孔也。商声浊于角，当在角下，而角声以在体中，故上其商孔，令在宫上，清于宫也。然则宫商正也，余声皆倍也。<sup>①</sup>

根据这段原文和上表中计算出来的数据，可以勾勒出黄钟笛的开孔图：

图 13.



① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第20~21页。

### 三、荀勖笛律留下的困惑

#### 1. 对文献的校勘与补缺

对照《晋书》中的记载，太簇、姑洗、林钟三律之笛的数据有误，我们可以核校计算而予以校勘，仲吕之笛缺失的数据也可以补齐。

……凡笛体用角律，其长者八之，蕤宾、林钟也。短者四之。其余十笛皆四角也。空中实容，长者十六。短笛竹宜受八律之黍也。若长短不合于此，或器用不便声均法度之齐等也。然笛竹率上天下小，不能均齐，必不得已，取其声均合。……

大吕之笛，正声应大吕，下徵应夷则，长二尺六寸六分三厘。

太簇之笛，正声应太簇，下徵应南吕，长二尺五寸二分八厘四。<sup>①</sup>

夹钟之笛，正声应夹钟，下徵应无射，长二尺四寸。

姑洗之笛，正声应姑洗，下徵应应钟，长二尺二寸四分七厘四。<sup>②</sup>

仲吕之笛，正声应仲吕，下徵应南吕，长二尺一寸三分三厘四。<sup>③</sup>

蕤宾之笛，正声应蕤宾，下徵应大吕，长三尺九寸

① 原为“三分一厘”，应校勘为“二分八厘四”，原文只保留至厘，厘后余数称“有奇”，表 32 中保留到小数点后 4 位。

② 原为“三分三厘”，现校勘为“四分七厘四”，原文只保留至厘，厘后余数称“有奇”。

③ 原校为“长二尺一寸三分三厘有奇”。以三倍生律可从黄钟笛直接得出仲吕笛长，厘后无余数，可删去“有奇”二字。

九分五厘有奇。变宫近宫孔，故倍半令下，便于用也。林钟亦如之一。

林钟之笛，正声应林钟，下徵应太簇，长三尺七寸九分二厘有奇。<sup>①</sup>

夷则之笛，正声应夷则，下徵应夹钟，长三尺六寸。变宫之法，亦如蕤宾，体用四角，故四分益一也。

南吕之笛，正声应南吕，下徵应姑洗，长三尺三寸七分有奇。

无射之笛，正声应无射，下徵应仲吕，长三尺二寸。

应钟之笛，正声应应钟，下徵应蕤宾，长二尺九寸九分六厘有奇。<sup>②</sup>

虽然我们可以按照《晋书》所记载的方法，计算出各笛的长度甚至开孔的数据，但由于文献没有记载管径大小和按孔大小，所以仍然很难复制出来。

杨荫浏先生曾在1952年版的《中国音乐史纲》一书中，根据“短者四之，……受八律之黍也”这一给定的条件，拟制出黄钟笛管，并通过试验证明荀勖已经应用了管口校正。但他对半音孔与全音孔的间距并未再做校正，所以不完全精确，在连续开放音孔吹奏时，就会听到一些差异。

## 2. 荀勖笛律与乐学实践的两个矛盾

荀勖笛律与当时民间“笛上三调”的乐学实践联系在一起时，就形成了两个矛盾。

首先，他已经制作了十二支笛，但同时又要每笛三宫，即文

① 原为“七厘”，应校勘为“二厘”。

② 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第24~26页。



献中所说的“正声调法”、“下徵调法”和“清角之调”。如此一来，便从实践应用上否定了十二笛存在的必要性。所以，虽然做出了理论上合乎道理的十二支笛，但在实用上并不方便，因此并未真正被使用。

第二个矛盾是翻调不便。以下将对照原文列表展示三调之间各音的对应关系：

**下徵调法：**林钟为宫，第四孔也。本正声黄钟之徵。徵清，当在宫上，用笛之宜，倍令浊下，故曰下徵。下徵更为宫者，《记》所谓‘五声，十二律还相为宫’也。然则正声清，下徵为浊也。南吕为商，第三孔也。本正声黄钟之羽，今为下徵之商也。应钟为角，第二孔也。本正声黄钟之变宫，今为下徵之角也。黄钟为变徵，下徵之调，林钟为宫，大吕当为变徵，而黄钟笛本无大吕之声，故假用黄钟以为变徵也。假用之法，当为变徵之声，则俱发黄钟及太簇、应钟三孔。黄钟应浊而太簇清，大吕律在二律之间，俱发三孔而微磳磳之，则得大吕变徵之声矣。诸笛下徵调求变徵之法，皆如此也。太簇为徵，笛后出孔。本正声之商，今为下徵之徵也。姑洗为羽，笛体中翕声。本正声之角，今为下徵之羽。蕤宾为变宫。附孔是也。本正声之变徵也，今为下徵之变宫也。然则正声之调，孔转下转浊，下徵之调，孔转上转清也。

**清角之调：**以姑洗为宫，即是笛体中翕声。于正声为角，于下徵为羽。清角之调乃以为宫，而哨吹令清，故曰清角。惟得为宛诗谣俗之曲，不合雅乐也。蕤宾为商，正也。林钟为角，非正也。南吕为变徵，非正也。应钟为徵，正也。黄钟为羽，非正也。太簇为变宫。非正也。清角之调，唯宫、商及徵与律相应，余四声非正者皆浊，一律哨吹令清，假而用之，其例一也。<sup>①</sup>

① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第23~24页。

表 34.

	孔位	第一孔	第四孔	背孔	第三孔	闭孔	第二孔	第五孔
合今之指法	律名	黄钟	林钟	太簇	南吕	姑洗	应钟	蕤宾
尺字调指法	正声调法	宫	徵	商	羽	角	变宫	变徵
正宫调指法	下徵调法	变徵 <sup>①</sup>	宫	徵	商	羽	角	变宫
凡字调指法	清角之调 <sup>②</sup>	$\flat$ 羽	$\flat$ 角	$\flat$ 变宫	$\flat$ 变徵	宫	徵	商

从表 34 的比较可看出，第二个矛盾，即“清角之调：……林钟为角，非正也。南吕为变徵，非正也。……黄钟为羽，非正也。太簇为变宫，非正也。……哨吹令清，假而用之……”哨吹在一笛上吹奏三宫，清角之调吹不准，下徵调的“变徵”音也不是从第五孔吹出。那么，这样的笛子只有一宫是准的，而要转清角之调是根本不可能的。

荀勖制笛有其经验性约数，还难说他是有物理学的精确数据，但在当时能造出达到这样精确程度的管乐器，又能得出管口校正的规律和数据，在应用律学上有很大贡献。这个例子似乎也能令我们透视出，自古以来，存在着理论家陶醉于自己的推演而缺少实践检验的情况。事实上，乐人在自己的实践中有更简单直

① 原文已说明“俱发三孔而微磬礮之，则得大吕变徵之声矣”，所以“变徵”之音并不是第一孔所生，也不是用叉口指法，而是开第一孔、背孔和第二孔（即黄钟、太簇、应钟）。

② “清角之调”只有姑洗、应钟、蕤宾三律得正声，其余四声皆浊而非正声，急吹（高八度）或超吹（高八度又纯五度）只能得低半音，故言“哨吹令清，假而用之”。

接的纠正方法，《晋书》也记载了荀勖采访列和的对话，从列和的介绍中可知，“笛上三调”的翻调是不成问题的。

## 第四章

# 新律的探索

第一节 何承天新律

第二节 刘焯律

第三节 王朴新律

第四节 蔡元定十八律

.....



## 第一节

### 何承天新律

与京房增加律数截然相反的做法是简化音律并能够黄钟还原，这种探索始推何承天新律（何承天，公元370~447年）。

《隋书·卷十六·律历志》何承天《立法制议》云：

上下相生，三分损益其一，盖是古人简易之法。犹如古历周天三百六十五度四分之一，后人改制，皆不同焉。而京房不悟，谬为六十。承天更设新率，则从仲吕还得黄钟，十二旋宫，声韵无失。黄钟长九寸，太簇长八寸二厘，林钟长六寸一厘，应钟长四寸七分九厘强。其仲吕上生所益之分，还得十七万七千一百四十七，复十二辰参之数。<sup>①</sup>

据《宋书·律志》记载：“今上生不及黄钟实二千三百八十四，九约实一千九百六十八为一分……”《宋书·律志》中有个表，列出了全部的律数，单位保留到寸、分、厘，厘以后用“强”、“弱”、“大强”、“大弱”、“小强”、“小弱”等表示。何承天的算法是先以传统“三分损益法”，从黄钟大数177147开始算起，依次得出十二律数，继而再三分益一上生从“仲吕还得黄

<sup>①</sup> 《隋书·卷十六·律历志》，《二十五史》。

钟”，得实数  $174762 \frac{2}{3}$ ，比出发律黄钟大数 177147 短  $2384 \frac{1}{3}$ 。

何承天将这个差数 12 等分，即  $2384 \frac{1}{3} \times \frac{1}{12}$ ，依次递加在三分损益法所生各律上，再将各律调整过的实数除以  $3^9$ （19683）得各律位的振动体长度。

现在将何承天大数差额用公式表达为：

$$2^0 \cdot 3^{11} - 2^{19} \cdot 3^{-1} = 2384 \frac{1}{3} = 2384.3333$$

将这个差额 12 等分，即：

$$(2^0 \cdot 3^{11} - 2^{19} \cdot 3^{-1}) \div 12$$

$$= \left[ \begin{array}{l} 2^0 \cdot 3^{11} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ -2^{19} \cdot 3^{-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} 2^{-0} \cdot 3^{10} \\ -2^{17} \cdot 3^{-2} \end{array} \right]$$

$$= 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot \left[ \begin{array}{l} 3^{12} \\ -2^{19} \end{array} \right] = \frac{3^{12} - 2^{19}}{36} = \frac{7153}{36}$$

根据何承天算法，自黄钟大数 177147，以三分损益法逐次求出十二律律数后，每律还要求增加数值：

$$\frac{7153}{36} \times \text{生律次数}$$

如此便得到何承天算法新律数，制成表 35，表中数据与《宋书·律志》中记载的“新律度”、“新律分”是一致的。

表 35. 何承天算法

律名	三分损益法 律数	各项 $\times 3^{-9}$ 求旧律数振动体 长度(寸)	何承天算法	新律律数	各项 $\times 3^{-9}$ 求新律数 振动体长度(寸)	相对波长	全音数	音分数	与十二平均 律的差数
黄钟	177147 $=2^0 \cdot 3^{11}$	$2^0 \cdot 3^{11} \times 3^{-9}$ $=2^0 \cdot 3^2$ $=9$	177147 $=2^0 \cdot 3^{11}$	177147 $=2^0 \cdot 3^{11}$	$2^0 \cdot 3^{11} \times 3^{-9}$ $=2^0 \cdot 3^2$ $=9$	1	0	0	
林钟	118098 $=2^1 \cdot 3^{10}$	$2^1 \cdot 3^{10} \times 3^{-9}$ $=2^1 \cdot 3^1$ $=6$	$2^1 \cdot 3^{10}$ $+\frac{7153}{36} \times 1$	$118296 \frac{25}{36}$ $=3^2 \times 13144$ $+\frac{5^2}{2^2 \cdot 3^2}$	$(3^2 \times 13144 + \frac{5^2}{2^2 \cdot 3^2}) \times 3^{-9}$ $=\frac{13144}{3^7} + \frac{5^2}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $=\frac{13144 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 5^2}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $=6 \frac{28537}{2834352}$ $=6.010095$ $\approx 6 \frac{1}{100}$ $=6.01$	$\frac{601}{900}$	3.495	699.07	-0.005



太簇	$157464$ $= 2^3 \cdot 3^9$	$2^3 \cdot 3^9 \times 3^{-9}$ $= 2^3$ $= 8$	$2^3 \cdot 3^9$ $+ \frac{7153}{36} \times 2$	$\frac{157861}{18}$ $= 11 \times 14351$ $+ \frac{7}{2 \cdot 3^2}$	$(11 \times 14351 + \frac{7}{2 \cdot 3^2}) \times 3^{-9}$ $= \frac{14351 \cdot 11}{3^9} + \frac{7}{2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{14351 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3^2 + 7}{2 \cdot 3^{11}}$ $= 8.020189$ $\approx 8 \frac{1}{50}$ $= 8.02$	$\frac{401}{450}$	$0.998$ $199.59$	$-0.002$
南吕	$104976$ $= 2^4 \cdot 3^8$	$2^4 \cdot 3^8 \times 3^{-9}$ $= 2^4 \cdot 3^{-1}$ $= 5 \frac{1}{3}$ $= 5.333333$	$2^4 \cdot 3^8$ $+ \frac{7153}{36} \times 3$	$\frac{105572}{12}$ $= 4 \times 26393$ $+ \frac{1}{2^2 \cdot 3}$	$(4 \times 26393 + \frac{1}{2^2 \cdot 3}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2^2 \cdot 26393}{3^9} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^{10}}$ $= \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 26393 + 1}{2^2 \cdot 3^{10}}$ $= \frac{1266865}{236196}$ $= 5 \frac{85885}{236196} = 5.363617$ $\approx 5 \frac{9}{25} = 5.36$	$\frac{134}{225}$	$4.485$ $897.23$	$-0.015$

姑洗	$139968$ $=2^6 \cdot 3^7$	$2^6 \cdot 3^7 \times 3^{-9}$ $=2^6 \cdot 3^{-2}$ $=7 \frac{1}{9}$ $=7.111111$	$2^6 \cdot 3^7$ $+ \frac{7153 \times 4}{36}$	$140762 \frac{7}{9}$ $=2 \times 70381$ $+ \frac{7}{3^2}$	$(2 \times 70381 + \frac{7}{3^2}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2 \cdot 70381 + 7}{3^9} + \frac{7}{3^{11}}$ $= \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 70381 + 7}{3^{11}}$ $= \frac{1266865}{177147} = 7 \frac{26836}{177147}$ $= 7.151490 \approx 7 \frac{3}{20} = 7.15$	$\frac{143}{180}$	$1.992 \quad 398.38$	$-0.008$
应钟	$93312$ $=2^7 \cdot 3^6$	$2^7 \cdot 3^6 \times 3^{-9}$ $=2^7 \cdot 3^{-3}$ $=4 \frac{20}{27}$ $=4.740740$	$2^7 \cdot 3^6$ $+ \frac{7153 \times 5}{36}$	$94305 \frac{17}{36}$ $=3 \times 5 \times 6287$ $+ \frac{17}{2^2 \cdot 3^2}$	$(3 \times 5 \times 6287 + \frac{17}{2^2 \cdot 3^2}) \times 3^{-9}$ $= \frac{5 \cdot 6287}{3^8} + \frac{17}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{6287 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 + 17}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{3394997}{708588} = 4 \frac{560645}{708588}$ $= 4.791214 \approx 4 \frac{79}{100} = 4.79$	$\frac{479}{900}$	$5.459 \quad 1091.88$	$-0.041$

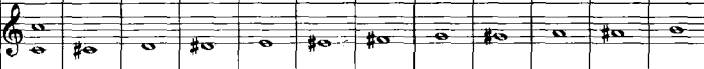
蕤宾	$2^9 \cdot 3^3 \times 3^{-9}$ $= 2^9 \cdot 3^{-4}$ $= 6 \frac{26}{81}$ $= 6 \frac{2 \cdot 13}{3^4}$ $= 6.320988$	$2^9 \cdot 3^5$ $+ \frac{7153 \times 6}{36}$	$125608 \frac{1}{6}$ $= 2^3 \times 15701$ $+ \frac{1}{2 \cdot 3}$	$(2^3 \times 15701 + \frac{1}{2 \cdot 3}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2^3 \cdot 15701}{3^9} + \frac{1}{2 \cdot 3^{10}}$ $= \frac{2^4 \cdot 15701 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3^{10}}$ $= \frac{753649}{118098}$ $= 6 \frac{45061}{118098}$ $= 6.381556 \approx 6 \frac{19}{50} = 6.38$	$\frac{319}{450}$	2.978	595.64	-0.022
大吕	$2^{11} \cdot 3^4 \times 3^{-9}$ $= 2^{11} \cdot 3^{-5}$ $= 8 \frac{104}{243}$ $= 8 \frac{2^3 \cdot 13}{3^5}$ $= 8.427984$	$2^{11} \cdot 3^4$ $+ \frac{7153 \times 7}{36}$	$167278 \frac{31}{36}$ $= 2 \times 83639$ $+ \frac{31}{36}$	$(2 \times 83639 + \frac{31}{36}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2 \cdot 83639}{3^9} + \frac{31}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 83639 + 31}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{6022039}{708588} = 8 \frac{353335}{708588}$ $= 8.4986 \approx 8 \frac{49}{100} = 8.49$	$\frac{283}{300}$	0.505	100.99	+0.005

夷则	$110592$ $= 2^{12} \cdot 3^3$ $2^{12} \cdot 3^3 \times 3^{-9}$ $= 2^{12} \cdot 3^{-6}$ $= 5 \frac{451}{729}$ $= 5.618656$	$2^{12} \cdot 3^3$ $+ \frac{7153}{36} \times 8$	$112181 \frac{5}{9}$	$(112181 + \frac{5}{9}) \times 3^{-9}$ $= \frac{112181}{3^9} + \frac{5}{3^{11}}$ $= \frac{3^2 \cdot 112181 + 5}{3^{11}}$ $= \frac{1009634}{177147}$ $= 5 \frac{123899}{177147}$ $= 5.699413 \approx 5 \frac{69}{100} = 5.69$	$\frac{569}{900}$	3.969	793.8	-0.031
夹钟	$147456$ $= 2^{14} \cdot 3^2$ $2^{14} \cdot 3^2 \times 3^{-9}$ $= 2^{14} \cdot 3^{-7}$ $= 7 \frac{1075}{2187}$ $= 7 \frac{5^2 \cdot 43}{3^7}$ $= 7.4915409$	$2^{14} \cdot 3^2$ $+ \frac{7153}{36} \times 9$	$149244 \frac{1}{4}$ $= 3 \times 2^2$ $\times 12437 + \frac{1}{4}$	$(3 \times 2^2 \times 12437 + \frac{1}{4}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2^2 \cdot 12437}{3^8} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^9}$ $= \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 12437 + 1}{2^2 \cdot 3^9}$ $= \frac{596977}{78732} = 7 \frac{45853}{78732}$ $= 7.582 \approx 7 \frac{29}{50} = 7.58$	$\frac{379}{450}$	1.486	297.27	-0.014

无射	$98304 = 2^{15} \cdot 3^1$ $2^{15} \cdot 3^1 \times 3^{-9}$ $= 2^{15} \cdot 3^{-8}$ $= 4 \frac{6524}{6561}$ $= 4 \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 233}{3^8}$ $= 4.9943606$	$2^{15} \cdot 3^1$ $+ \frac{7153}{36} \times 10$ $100290 \frac{17}{18}$ $= 2 \times 3 \times 5$ $\times 3343 + \frac{17}{18}$	$(2 \times 3 \times 5 \times 3343 + \frac{17}{18}) \times 3^{-9}$ $= \frac{2 \times 5 \times 3343}{3^8} + \frac{17}{2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 3343 + 17}{2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{180524}{354294} = 5 \frac{139}{1458}$ $= 5.095336 \approx 5 \frac{19}{200} = 5.095$	$\frac{51}{90}$	$4.925$	$980.56$	$-0.075$
仲吕	$131072 = 2^{17}$ $2^{17} \times 3^{-9}$ $= 2^{17} \cdot 3^{-9}$ $= 6 \frac{12974}{19683}$ $= 6 \frac{2 \cdot 6487}{3^9}$ $= 6.659147$	$2^{17} \cdot 3^0$ $+ \frac{7153}{36} \times 11$ $133257 \frac{23}{36}$ $= 3 \times 44419$ $+ \frac{23}{2^2 \cdot 3^2}$	$(3 \times 44419 + \frac{23}{2^2 \cdot 3^2}) \times 3^{-9}$ $= \frac{44419}{3^8} + \frac{23}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 44419 + 23}{2^2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{4797275}{708588}$ $= \frac{545747}{708588}$ $= 6 \frac{77}{100} = 6 \frac{7 \cdot 11}{2^2 \cdot 5^2}$ $\approx 6 \frac{77}{100} = 6 \frac{7 \cdot 11}{2^2 \cdot 5^2}$	$\frac{677}{900}$	$2.465$	$492.92$	$-0.035$

黄钟	$\frac{174762}{3}$ $= 2^{19} \cdot 3^{-1}$	$2^{19} \cdot 3^{-1} \times 3^{-9}$ $= 2^{19} \cdot 3^{-10}$ $= 8 \frac{51896}{59049}$ $= 8 \frac{2^3 \cdot 13 \cdot 499}{3^{10}}$ $= 8.878863$	$2^{19} \cdot 3^{-1}$ $+ \frac{7153}{36} \times 12$	$\frac{2^{19}}{3} + \frac{3^{12} - 2^{19}}{36}$ $\times 12$ $177147$ $= 2^0 \cdot 3^{11}$	$2^0 \cdot 3^{11} \times 3^{-9} = 9$	1	0	0	
----	--	---	---	---	--------------------------------------	---	---	---	--

表 36. 按半音顺序排列:

生律顺序	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
校正值		+0.005	-0.002	-0.014	-0.008	-0.035	-0.022	-0.005	-0.031	-0.015	-0.075	-0.041
												
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
律数(寸)	9 寸	8.49	8.02	7.58	7.15	6.77	6.38	6.01	5.69	5.36	5.095	4.79
相对波长	1	$\frac{283}{300}$	$\frac{401}{450}$	$\frac{379}{450}$	$\frac{143}{180}$	$\frac{677}{900}$	$\frac{319}{450}$	$\frac{601}{900}$	$\frac{569}{900}$	$\frac{134}{225}$	$\frac{51}{90}$	$\frac{479}{900}$
全音数	0	0.505	0.998	1.486	1.992	2.465	2.978	3.495	3.969	4.485	4.925	5.459

其中第 4 次生律  $\frac{143}{180}$  可以进一步分解为  $\frac{11 \times 13}{180}$ , 第 6 次生律

$\frac{319}{450}$  可以进一步分解为  $\frac{11 \times 29}{450}$ 。表 36 中最后一行与十二平均律

的差数最大为 0.075 全音 (14.9 音分), 最小为 0.002 全音 (0.41 音分)。

何承天新律的基本方法也是按三分损益法, 但在八度内进行调整而获得一个十分逼近十二平均律的结果。他的调整方法是將差额平均分配在十二律长度上, 这种新律体现了朴素趋匀观念自觉地向数理靠拢, 但理论上是错误的, 因为他是用振动体长度的均匀差数添加到各律, 不符合音越高、差数越小的道理。由于十二长度均差新律中音高差数最大的是无射律, 所以何承天的新律只是效果上很接近, 但从实用上说不是准确的十二平均律。

## 第二节

### 刘焯律

刘焯是隋代（公元 581～618 年）间人，当过参议律历等咨询性的官吏，《隋书·卷十六·律历志》记载了他于公元 604 年提出的一种律制，他的计算方法是：

其黄钟管六十三为实，以次每律减三分，以七为寸法。约之，得黄钟长九寸，太簇长八寸一分四厘，林钟长六寸，应钟长四寸二分八厘七分之四。<sup>①</sup>

按照刘焯的生律办法，十二律由低到高依次相生出来，故表 37 按半音顺序排列：

表 37.

十二律 顺序	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	清黄钟
刘焯 算法	$\frac{63}{7}$	$\frac{63-3}{7}$	$\frac{63-6}{7}$	$\frac{63-9}{7}$	$\frac{63-12}{7}$	$\frac{63-15}{7}$	$\frac{63-18}{7}$	$\frac{63-21}{7}$	$\frac{63-24}{7}$	$\frac{63-27}{7}$	$\frac{63-30}{7}$	$\frac{63-33}{7}$	$\frac{63-36}{7}$

① 《隋书·卷十六·志十一·律历上》。



振动体 长度(尺)	9尺	$8.57\frac{1}{7}$	$8.14\frac{2}{7}$	$7.71\frac{3}{7}$	$7.28\frac{4}{7}$	$6.85\frac{5}{7}$	$6.42\frac{6}{7}$	6	$5.57\frac{1}{7}$	$5.14\frac{2}{7}$	$4.71\frac{3}{7}$	$4.28\frac{4}{7}$	$3.85\frac{5}{7}$
相邻两律 长度差(尺)		0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
相对 波长	1	$\frac{857}{900}$	$\frac{407}{450}$	$\frac{257}{300}$	$\frac{1457}{1800}$	$\frac{343}{450}$	$\frac{643}{900}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{557}{900}$	$\frac{257}{450}$	$\frac{157}{300}$	$\frac{143}{300}$	$\frac{193}{450}$
全音数		0.42	0.87	1.34	1.83	2.35	2.91	3.51	4.15	4.85	5.61	6.41	7.33
与平均 律之差		-0.08	-0.13	-0.16	-0.17	-0.15	-0.09	+0.01	+0.15	+0.35	+0.61	+0.91	+1.33

其中第2次生律 $\frac{407}{450}$ 可以进一步分解为 $\frac{11 \times 37}{450}$ ；第11次生律 $\frac{143}{300}$ 可以进一步分解为 $\frac{11 \times 13}{300}$ 。

上表中，除了林钟与黄钟之间是一个精确的纯五度关系外，其他各律的相对波长都是很复杂的数，音的高度非常混乱，应钟已经高于纯八度，所谓“清黄钟”只是生律顺序排列出来的，比清黄钟高约小三度，其实质与清黄钟完全无关。

刘焯律数完全背离了生律的自然法则，设计63这个数只是为了获得黄钟长九寸这个传统，依次减三的结果使十二律间长度形成均差关系，以为长度的均差与音程的等差一致。这种误解与以为匀孔或匀品就是平均律的误解是一样的。如上梳理可以清楚看出，刘焯律数说明刘焯本人在观念上有对平均律的自觉追求，但由于科学认识的局限，他对“半音”的数理规定不符合声学原理，只是为了维护传统的黄钟九寸。他也不了解音程相加的本质是比值相乘，所以犯了声学和律学的常识性错误。他所提出的律制只是历史上探索平均律历程中的一个失败个案。

### 第三节

## 王朴新律

王朴为五代（公元 907～960）年间人，研究律学和天文历法，周世宗显德六年（公元 959 年），王朴提出一种新律，与前面的律制皆不相同。他自己将其表述为：

九者，成数也，是以黄帝吹九寸之管，得黄钟之声，为乐之端也。半之，清声也。倍之，缓声也。三分其一以损益之，相生之声也。十二变而复黄钟，声之总数也。乃命之曰十二律。旋迭为均，均有七调，合八十四调，播之于八音，著之于歌颂。……

……以上下相生之法推之，得十二律管。以为众管互吹，用声不便，乃作律准，十三弦宣声，长九尺张弦，各如黄钟之声。以第八弦六尺，设柱为林钟；第三弦八尺，设柱为太簇；第十弦五尺三寸四分，设柱为南吕；第五弦七尺一寸三分，设柱为姑洗；第十二弦四尺七寸五分，设柱为应钟；第七弦六尺三寸三分，设柱为蕤宾；第二弦八尺四寸四分，设柱为大吕；第九弦五尺六寸三分，设柱为夷则；第四弦七尺五寸一分，设柱为夹钟；第十一弦五尺一分，设柱为无射；第六弦六尺六寸八分，设柱为仲吕；第十三弦四尺五寸，设柱为黄钟之清声。十二律中，旋用七声为均，为均之主者，宫也，

徵、商、羽、角、变宫、变徵次焉，发其均主之声，归乎本音之律，七声迭应布不乱，乃成其调。均有七调，声有十二均，合八十四调，歌奏之曲，由之出焉。<sup>①</sup>

王朴新律目的很明确，为了旋迭为均，合八十四调。他的生律方法仍是以三分损益法为基础，但他明确了“倍”、“半”的音律关系：“半之，清声也。倍之，缓声也。”设定清黄钟律数为黄钟律数的一半。这种作法纠正了固守三分损益法不能生出纯正八度的缺陷，较之以往所有追求黄钟还原的尝试，有了一个突破性进步，而这个突破性进步在于他有对弦长规律的实践把握。由于半律清黄钟比原本依循三分损益法求出的清黄钟律数长出 0.06 尺，于是，在生南吕和姑洗两律时，将分母 3 缩小，并通过四舍五入，保持小数点后两位，使这两律的长度分别比三分损益法求出的长度增加 0.01 尺和 0.02 尺，其后各律仍用三分损益法，而长度也随之加长。此法当时被称为“新法”。王朴并没有告诉我们他缩小的比例是多少，有学者曾经根据这段文献提供的数据求出了缩减分母的约率值<sup>②</sup>，他们的探索方法很有启发意义。不过，

① 《旧五代史·卷一百四十五·志七·乐志下》。

② 陈应时先生发表于《交响》1989 年第 2 期的论文《再谈王朴律》，提出了两种缩减分母的数值，即在求南吕时，将原来的分母 3 减去  $\frac{3}{500}$ ，求姑洗时，分母 3 减去  $\frac{1}{500}$ ；同年《黄钟》第 3 期上发表了郑荣达先生的文章《王朴密率解》，认为只用一个约率值，即分母 3 减去  $\frac{500000}{749785}$ ，经过这样的调节，就可以得到王朴律的结果。陈应时先生在《中国音乐》1992 年第 2 期的《律学四题》中称道郑荣达先生这种求公比值的作法，对自己的约率值重新修订为  $\frac{1}{250}$ ，很显然，这个数值比例关系更简单。不过，陈先生没有提供这个数的计算公式。这个学术讨论的个案，后来陈应时先生记录在他的学术文集《中国乐律学探微》一书，详见该书第 489 页。

他们都没有提供求解的途径。在此，我们设计这样一个求解方案：

根据已知的条件，太簇生南吕，太簇律数为8，南吕的王朴律数为5.34，设  $8x=5.34$ ，则

$$x = \frac{534}{800} = \frac{534 \cdot 2^4 \cdot 5^4}{800 \cdot 2^4 \cdot 5^4} = \frac{6675}{10000} = \frac{89 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{89}{133.3333}$$

王朴律涉及了这样一个跃迁算子生出南吕、姑洗两律。

利用倒数的倒数来求分母：

$$\begin{aligned} \frac{89}{133.3333} &= \frac{1}{\frac{133.3333}{89}} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 133.3333 \cdot \frac{90}{89}} = \frac{2}{\frac{269.66}{90}} \\ &= \frac{2}{89 \cdot \frac{90}{89}} \\ &\approx \frac{2}{\frac{270-0.4}{90}} \approx \frac{2}{3-\frac{4}{900}} \end{aligned}$$


因而得出分母缩小  $\frac{4}{900}$  这样的结果。将这个结果带入计算，得到的数据与王朴律数相同。

表 38.

	律名	从旧律数 得弦长	王朴算法	王朴算法 求弦长	比原长 度增加	相对 波长	全音数	音分数
0	黄钟	9尺	9	9尺		1	0	0
1	林钟	6尺	$9 \times \frac{2}{3}$	6尺		$\frac{2}{3}$	3.51	701.95
2	太簇	8尺	$6 \times \frac{4}{3}$	8尺		$\frac{8}{9}$	1.0195	203.91
3	南吕	5.33尺	$8 \times \frac{2}{3-\frac{4}{900}}$ =5.341246	5.34尺	+1分	$\frac{89}{150}$	4.5185	903.70

4	姑洗	7.11 尺	$5.34 \times \frac{4}{3 - \frac{4}{900}}$ $= 7.130563$	7.13 尺	+2 分	$\frac{713}{900}$ $= \frac{23 \times 31}{900}$	2.016	403.23
5	应钟	4.74 尺	$7.13 \times \frac{2}{3}$ $= 4.753333$	4.75 尺	+1 分	$\frac{19}{36}$	5.532	1106.40
6	蕤宾	6.32 尺	$4.75 \times \frac{4}{3}$ $= 6.333333$	6.33 尺	+1 分	$\frac{211}{300}$	3.046	609.26
7	大吕	8.43 尺	$6.33 \times \frac{4}{3}$ $= 8.44$	8.44 尺	+1 分	$\frac{211}{225}$	0.5561	111.22
8	夷则	5.62 尺	$8.44 \times \frac{2}{3}$ $= 5.626666$	5.63 尺	+1 分	$\frac{563}{900}$	4.0607	812.15
9	夹钟	7.49 尺	$5.63 \times \frac{4}{3}$ $= 7.506666$	7.51 尺	+2 分	$\frac{751}{900}$	1.5667	313.33
10	无射	4.99 尺	$7.51 \times \frac{2}{3}$ $= 5.006666$	5.01 尺	+1 分	$\frac{167}{300}$	5.0707	1014.14
11	仲吕	6.66 尺	$5.01 \times \frac{4}{3}$ $= 6.68$	6.68 尺	+2 分	$\frac{167}{225}$	2.5805	516.09
12	清黄钟	4.44 尺	$\frac{(\text{直接倍半相生})9 \times \frac{1}{2}}{(\text{仲吕三分损一生清黄钟})}$ $6.68 \times \frac{2}{3} = 4.5333$ $\approx 4.5$	4.5 尺	+6 分	$\frac{1}{2}$	6	1200

表 39. 十二律由低到高按半音顺序排列

生律顺序	$\frac{0}{12}$	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
与平均律之差	0	+0.056	+0.02	+0.07	+0.02	+0.08	+0.046	+0.01	+0.06	+0.0185	+0.07	+0.032
												
律名	黄 清黄	大	太	夹	姑	仲	蕤	林	夷	南	无	应
振动体长度	9 尺 4.5 尺	8.44	8	7.51	7.13	6.68	6.33	6	5.63	5.34	5.01	4.75
相对波长	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{211}{225}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{751}{900}$	$\frac{713}{900}$	$\frac{167}{225}$	$\frac{211}{300}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{563}{900}$	$\frac{89}{150}$	$\frac{167}{300}$	$\frac{19}{36}$
全音数	$\frac{0}{6}$	0.556	1.02	1.57	2.02	2.58	3.046	3.51	4.06	4.5185	5.07	5.532
与纯律的差数		-0.004		-0.01		-0.02	-0.004		-0.01		-0.02	
音程值		纯律 大半音		纯律 小三度		纯律 宽四度	纯律 减五度		纯律 小六度		纯律 小七度	

从上表中的数据可以看出，王朴新律追求平均律的目标是很清楚的，所用的方法由于改变了分母，长度比值变化，其实质形成一种“跃迁”。在八度内调整各律的基本方法虽然早在何承天时就已经运用，但王朴的算法从物理意义上来说更为合理。王朴新律的结果有六律与纯律更接近，最大差数不足 3.5 音分，但很难因此而判断为王朴是在探索纯律，因为他的动机是为了解决“旋迭为均”，使十二均八十四调“归乎本音之律”。

## 第四节

### 蔡元定十八律

南宋蔡元定（公元1135～1198年）提出了“十八律”理论。

《变律篇》曰：十二律各自为宫，以生五声二变。

其黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律，则能具足。至蕤宾、大吕、夷则、夹钟、无射、仲吕六律，则取黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律之声，少下，不和，故有变律。律之当变者有六：黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟。变律者，其声近正律而少高于正律，然后洪纤、高下不相夺伦。变律非正律，故不为宫。……何承天、刘焯讥房之病，乃欲增林钟已下十一律之分，使至仲吕反生黄钟，还得十七万七千一百四十七之数，则是惟黄钟一律成律，他十一律皆不应三分损益之数，其失又甚于房。<sup>①</sup>

蔡元定认为何承天等人的新律“惟黄钟一律成律，他十一律皆不应三分损益之数，其失又甚于房。”他主张以三分损益法生出十二律后，继续加生六律，称为“变律”，由于非为正律，所

<sup>①</sup> 《宋史上·卷一百三十一·乐志第八十四·乐六》。

以不能当宫均。根据他的表述，我们制表如下：

表 40.

生律 序号	律名	三分损益	律数	相对波长	质底幂积	全音数	音分数
0	黄钟		177147	1	$2^0 \cdot 3^0$	0	0
1	林钟	$\times \frac{2}{3}$	118098	$\frac{2}{3}$	$2^1 \cdot 3^{-1}$	3.51	701.95
2	太簇	$\times \frac{4}{3}$	157464	$\frac{8}{9}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	1.01	203.91
3	南吕	$\times \frac{2}{3}$	104976	$\frac{16}{27}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	4.53	905.86
4	姑洗	$\times \frac{4}{3}$	139968	$\frac{64}{81}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	2.04	407.82
5	应钟	$\times \frac{2}{3}$	93312	$\frac{128}{243}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	5.55	1109.77
6	蕤宾	$\times \frac{4}{3}$	124416	$\frac{512}{729}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$	3.06	611.73
7	大吕	$\times \frac{4}{3}$	165888	$\frac{2048}{2187}$	$2^{11} \cdot 3^{-7}$	0.57	113.68
8	夷则	$\times \frac{2}{3}$	110592	$\frac{4096}{6561}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	4.08	815.64
9	夹钟	$\times \frac{4}{3}$	147456	$\frac{16384}{19683}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	1.59	317.59



10	无射	$\times \frac{2}{3}$	98304	$\frac{32768}{59049}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	5.1	1019.55
11	仲吕	$\times \frac{4}{3}$	131072	$\frac{131072}{177147}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	2.56	512.50
12	变黄钟	$\times \frac{4}{3}$	$174762 \frac{2}{3}$	$\frac{524288}{531441}$	$2^{19} \cdot 3^{-12}$	0.12	23.46
13	变林钟	$\times \frac{2}{3}$	$116508 \frac{4}{9}$	$\frac{1048576}{1594323}$	$2^{20} \cdot 3^{-13}$	3.63	725.41
14	变太簇	$\times \frac{4}{3}$	$155344 \frac{16}{27}$	$\frac{4194304}{4782969}$	$2^{22} \cdot 3^{-14}$	1.14	227.37
15	变南吕	$\times \frac{2}{3}$	$103563 \frac{5}{81}$	$\frac{8388608}{14348907}$	$2^{23} \cdot 3^{-15}$	4.65	929.33
16	变姑洗	$\times \frac{4}{3}$	$138084 \frac{20}{243}$	$\frac{33554432}{43046721}$	$2^{25} \cdot 3^{-16}$	2.156	431.28
17	变应钟	$\times \frac{2}{3}$	$92056 \frac{40}{729}$	$\frac{67108864}{129140163}$	$2^{26} \cdot 3^{-17}$	5.67	1133.24

其实蔡元定提出的“十八律”比起前边已有的各种尝试，并无真正新意，他仍是沿用京房之法，所以上表以黄钟大数起始。但在解决“还宫”的问题上，蔡元定并没有实际的作为，他本人称“十二律各自为宫，以生五声二变”，并强调“变律不为宫”，所以，这十八律的构想，目的很明确，只是要保证在十二律各律上有完备的七声相“和”，并不是追求十二律旋相为宫的理想。从这个意义上说，蔡元定沿用京房之法，却不明白京房之法的科学价值，所以止于实用生出十八律，而没有解决“旋相为宫”问

题的远大理想；批评何承天、刘焯等人悖离三分损益法，皆因他自己的思维禁锢于三分损益法，不思更新突破，故而既不能理解“何承天新律”在思维方法上的飞跃及合理性，也不能认清楚刘焯错误的根源所在。

表 41. “蔡元定十八律”十二均之“五声二变”结构关系

[illegible]

从表 41 中可以看出，十二均每均七声的结构和音高差数是一致的。从第七均开始已经出现变律，至仲吕均，七声音列中除了均主仲吕，其他各音都超出十二律，这就是蔡氏所谓“变律不为宫”。

## 第五章 琴律学

第一节 琴上十三徽的律学内涵

第二节 文献中记载的定弦法

第三节 暗徽的设置

第四节 具有多维生律因素的琴律

.....



至晚从汉代末年起，古琴的形状就基本上是现代这个样子：七根弦，琴面外侧有十三个徽位。虽然在先秦文献中没有表明琴律数理逻辑关系的记载，但《国语·周语》中记载周景王（公元前544～前520在位）时的乐官伶州鸠说过“度律均钟”，而三国吴韦昭注释“均钟”是先秦使用的一种弦律正律器。

## 第一节

### 琴上十三徽的律学内涵

尽管人们很早就已经运用琴律的律制规范，古琴的徽位与取音方法足可证明这一点。但由于缺少清晰的文献记载，我们无法在前边的章节中讨论。但从北宋人崔遵度（953～1020年）和沈括等对十三徽所作的论述，可以见到这种传自世世代代琴工的实践总结已经上升为律学研究：

《琴笈》世之传琴者，必曰长三尺六寸象暮之日，十三徽象暮之月，居中者象闰，伏羲以来未有甚辨者。至唐协律郎刘昉谓之乐之告（旨）也，其详杳冥无得而言焉。又以乐器配诸节候，而谓琴为夏至之音。于泛声，卒无述者，愚尝病之。因以张弓附案，泛其弦而十三徽声具焉，况琴之弦乎！是知非所谓象者，盖天地自

然之节耳，又岂止夏至之音而已。<sup>①</sup>

《梦溪笔谈·补笔谈》弦之有十三泛韵，此十二律自然之节也。盈丈之弦，其节亦十三；盈尺之弦，其节亦十三，故琴以为十三徽。不独弦如此，金石亦然。<sup>②</sup>

这两段文字中的“泛声”、“泛韵”就是现代所说的“泛音”。“天地自然之节”表明了弦振动会产生一系列谐音的物理道理，也就是现代声学中所说的“节点”（node）。“金石亦然”的结论说明，作者不但已经从经验性的观察了解弦振动的规律，对其他任何振动体与音律之间的自然关系应该也有理性认识，才会得出这样的论断。自他们提出“自然之节”后，南宋朱熹（1130～1200年）首次明确提出“琴律说”，将琴律的长期实践引入到理论律学研究中。

## 一、安徽法

朱熹在《琴律说》中概要介绍了古代琴工世代相传的确定徽位的“摺纸法”，亦名为“安徽法”，具体为“四折取中为法”。在明人蒋克谦编撰的《琴书大全》一书中，也有专文描述“安徽法”。由于《琴书大全》一书为蒋氏高祖、祖父、父亲及他本人世代揖录、代代扩充，故而资料丰富，而蒋氏高祖是嘉靖皇太后的父亲，因此被认为可能揖有内府材料（即蒋克谦序言中所提到

① 《琴苑要录》，宋人辑，明代抄本。1925年冯水据铁琴铜剑楼藏本抄，第74页。另见《琴书大全·第一卷·序琴十·崔遵度琴笺》，万历庚寅年（1590年）蒋克谦刊本。

② 《梦溪笔谈·补笔谈·卷一·乐律》。

的“往牒”),所载曲谱皆来自当时的古籍,因而来源悠久,又参互考订,分门析类,纤悉无遗,是故价值颇高。此书搜集古代各家指法很多,可以弥补另一部重要琴学文献《西麓堂琴统》<sup>①</sup>所载曲谱多而指法说明残缺之遗憾。这本书受重视的另外一个原因是,此书为万历年间的精刻本,而另一本琴学著作《永乐琴书集成》的子目与此书相同,但为写本,用的工料也不是永乐年间的,疑为明代书商伪作也未可知。由于上述理由,《琴书大全》这本书的文献价值是毋庸置疑的。

一法自岳至龈均分为二,其折断处为琴之半。为至中处正是七徽,为立徽之本。又以其二各均分之,其折断处又为半,为中,其在上者为四徽,其在下者为十徽。又以其所分之半,自四徽至岳,自十徽至龈各均分之,其折断处又皆为半,为中,在四徽之上者为一徽,十徽之下者为十三徽。又自岳至龈均分为五,以五之中,其两端之折断处为附近于七之中,在七徽上者为六徽,在七徽下者为八徽。又自六徽上至岳,自八徽下至龈均分之,其折断处又各为半,为中,在四徽上者为三徽,在十徽下者为十一徽。又自岳至龈均分为三,以三之中,其两端之折断处亚于六与八之为附近于七之中,在六之上者为五徽,在八之下者为九徽。又自五徽至岳,九徽至龈均分之,其折断处又各为半为中,在三徽上者为二徽,在十一徽下者为十二徽。此法比前说较明白,

<sup>①</sup> 《西麓堂琴统》成书于1549年。



因附于此以备参考。<sup>①</sup>

“安徽法”被朱载堉在《律学新说》中更清楚地解释为：

盖琴家自岳山至龙龈二者间，用纸一条，作为四折，以定四徽、七徽、十徽；作为五折，以定三徽、六徽、八徽、十一徽；作为六折，以定二徽、五徽、七徽、九徽、十二徽。首末两徽，乃四徽折半也。此法最为简易。若以算法定之，则置琴长若干为实，四归得四徽，一倍即七徽，二倍即十徽也。五归得三徽，一倍即六徽，二倍即八徽，三倍即十一徽也。六归得二徽，一倍即五徽，二倍即七徽，三倍即九徽，四倍即十二徽也。八归得一徽，七因之即十三徽也。<sup>②</sup>

即把与琴弦同长的纸条依次折二、三、四、五、六、八等分，取其“折”点为徽位，以琴面正中，即二分之一处为中心（七徽），两边对称地以三、四、五、六、八等分设徽，如此便可以知道十三徽之间的弦长比例和相对音高。

## 二、十三徽的律学规定

根据“安徽法”所介绍的弦长划分规定，从岳山到龙龈这段长度全弦振动，即散声，相对弦长表述为1，其他各徽按音的相对

① 《琴书大全·第四卷·琴制九·安徽法》，万历庚寅岁蒋克谦刊本，标点由笔者添加。

② 《律学新说·卷之一·论准徽与琴徽不同第十》。“归”为珠算术语，称一位除数的除法，在这里“四归”即“四分”。详见《律学新说》[明]朱载堉撰，冯文慈点注，人民音乐出版社出版，1986年9月北京第1版，第71页。

弦长就是小于 1 的数，我们可以计算出一弦上各徽的相对弦长：

图 14.

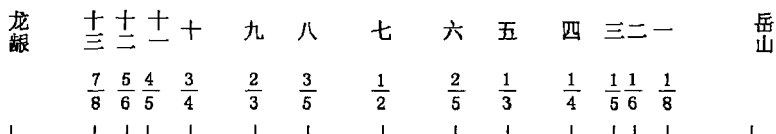
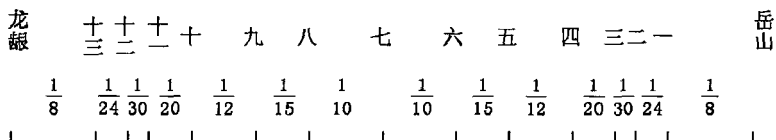


图 15. 以整体弦长认作 1 为标准，各徽之间的距离用分数表示



古琴有七条长度相同的弦，所以必须将相对弦长的概念转化为相对波长概念，才能在一个完整的系统下表述不同音高的七根弦以及每弦十三徽的所有按音，建立起相对音程关系。

转换的途径是这样的：

一弦散声相对波长为 1，各徽位的相对弦长乘以散声相对波长，写成公式为：

某徽相对波长 = 散声相对波长 × 某徽相对弦长

根据这个公式，可以制定出一弦琴律表。

表 42. 一弦琴律表

校正值		+16	+08	-07	-01	+01	-08		-07	+01		-07	+01	
借用记谱														
相对音高	0	1.16	1.58	1.93	2.49	3.51	4.42	6	7.93	9.51	12	13.93	15.51	18
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	1												
	二等分者							$\frac{1}{2}$						
	三等分者					$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$				
	四等分者				$\frac{3}{4}$			$\frac{2}{4}$			$\frac{1}{4}$			
	五等分者			$\frac{4}{5}$			$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{5}$			$\frac{1}{5}$		
	六等分者			$\frac{5}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{2}{6}$			$\frac{1}{6}$	
	八等分者		$\frac{7}{8}$			$\frac{6}{8}$		$\frac{4}{8}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$

表中的徽位排列顺序保持与琴面的徽位排列方向相一致，从表中可以看到三徽、六徽、八徽、十一徽以及十二徽按音都得到纯律音程。在十三徽上若以泛音技术演奏，表 42 中所有分母相同的徽位音高都相同，即弦的分段（2、3、4、5、6、8 等分，分子皆为 1）振动；若以按音演奏，则是由于掐住节点，剩下的有效弦长振动而产生的音高，这里的原理与印度人关注弦长掐段率、波斯阿拉伯人的量音原理是相同的。

有了一弦上的十三徽划分，还需要建立起七弦的定弦规范，这个渐趋成熟的过程反映在琴学文献中。朱熹曾提过两种定弦法，分别记载在《宋史·乐志》和《琴律说》中，这两种方法都包含着局部的逻辑矛盾，透露出琴律学理论在形成过程中与实践冲突和整合的发展轨迹。在后期的琴学文献《五知斋琴谱》<sup>①</sup>、

<sup>①</sup> 《五知斋琴谱》成书于 1667 年前后，刊印于 1721 年。

《琴学入门》<sup>①</sup>中记录的操作步骤表现出定弦法已经有了很清晰的内在逻辑。由于每个古琴徽位按音都表达了非常准确的相对弦长，所以在琴学文献中以文字叙述或谱字表示的“某弦与某弦某徽相应”，就很容易用现代律学的表述体系转述。以下将顺序介绍，对隐含在文言描述背后的律学本质予以本质与现象的双重剖析。

## 第二节

### 文献中记载的定弦法

#### 一、朱熹所传的两两种定弦法

##### 1. 《琴律说》中的定弦法

朱熹（1130～1200年）在《琴律说》中介绍的定弦法，其中存在着逻辑矛盾：

盖九徽之宫，隔二者生散徵，而散徵隔一上生十徽之商。九徽之商隔二下生散羽，而散羽隔一上生十一徽之角。九徽之角隔二下生散少宫，而散少宫隔一上生十徽之徵。九徽之徵隔二下生散少商，而散少商隔一上生

<sup>①</sup> 《琴学入门》成书于1864年。

十徽之羽也。

这段话的意思可以转译如下：

①一弦为宫，其九徽与相隔两弦的第四弦散声相应，四弦散声为徵；

②第四弦散声与相隔一弦的二弦十徽相应，二弦散声为商；

③二弦九徽与相隔两弦的第五弦散声相应，五弦散声为羽；

④五弦散声与相隔一弦的第三弦十一徽相应，三弦为角（此为清角）；

⑤三弦九徽与相隔两弦的第六弦散声相应，六弦为少宫；

⑥六弦散声与相隔一弦的第四弦十徽相应；

⑦第四弦九徽与相隔两弦的七弦散声相应，七弦为少商；

⑧第七弦散声与相隔一弦的五弦十徽相应，五弦为羽。

已知的条件是，一弦散声的相对弦长为 1，九徽相对弦长为  $\frac{2}{3}$ ，十徽相对弦长为  $\frac{3}{4}$ ，十一徽相对弦长为  $\frac{4}{5}$ 。据此，可作律学解析如下：

$$\text{①第四弦散声相对波长} = \text{第一弦散声相对弦长} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{②第四弦散声相对波长} = \text{第二弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}；$$

$$\text{第二弦散声相对波长} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{③第五弦散声相对波长} &= \text{第二弦散声相对波长} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{第五弦散声相对波长} = \text{第三弦散声相对波长} \times \frac{4}{5};$$

$$\text{第三弦散声相对波长} = \frac{16}{27} \div \frac{4}{5} = \frac{20}{27}$$

$$\textcircled{5} \text{第六弦散声相对波长} = \text{第三弦散声相对波长} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{20}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{40}{81}$$

$$\textcircled{6} \text{第六弦散声相对波长} = \text{第四弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \text{第七弦散声相对波长} = \text{第四弦散声相对波长} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$









$$\textcircled{8} \text{第七弦散声相对波长} = \text{第五弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{16}{27} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{9}$$

根据第⑥个条件，第六弦散声相对波长与一弦为倍半关系，再返回去验证第⑤个条件中第三弦的相对波长，第三弦散声相对波长  $= \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ 。

将上述结果整理为表格，可以清楚地看出第三、六两弦各有两种结果：

表 43.

校正值	$\pm 0$	+02	-01	+10	+01	+03	$\pm 0$	+11	+02
借用记谱									
相对音高	0	1.02	2.49	2.6	3.51	4.53	6	6.11	7.02
借用唱名	Do	Rai	Fa	Fa	So	La	Do	Do	Rai
弦序号	一	二	三	三	四	五	六	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{4}{9}$

这两种结果各有其存在的合理性。在第④、⑤两个条件中，根据第五弦散声 La 继续生律得到第三弦散声 Fa、第六弦散声 Do，这三弦之间正好构成了一个纯律大三和弦模式：

表 44.

借用唱名	Fa	La	Do
弦 序 号	三	五	六
散声相对波长	$\frac{20}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{40}{81}$
=	$\frac{60}{81}$	: $\frac{48}{81}$	: $\frac{40}{81}$
=	$(\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}) \times \frac{81}{240}$		

括号里的分数连比式正是我们早已熟悉的大三和弦的模式。这样定弦可以满足三、五、六弦演奏和音的需要。但同时造成另一个矛盾：一弦与三弦、一弦与六弦相互之间都不协和，特别是一弦与六弦之间倍、半关系被破坏了。

而根据第⑥个条件，由第四弦求出第六弦与第一弦为倍、半关系，第六弦散声相对波长为 $\frac{1}{2}$ ，三弦九徽与六弦散声相应，三

弦散声相对波长 $\frac{3}{4}$ 与一弦也互相协和。这种在一套定弦法中存在着数理矛盾正反映了理论摸索阶段的困惑。

## 2. 《宋史·乐志》中的定弦法

《宋史·乐志》中记载了朱熹所传的另一套定弦法，其中也存在着逻辑矛盾：

每疑七弦隔一调之，六弦皆应于第十晖，而第三弦独于第十一晖调之乃应。……其六弦会于十晖，则一与三者，角与散角应也；二与四者，徵与散徵应也；四与六者，宫与散少宫应也；五与七者，商与散少商应也；其第三、第五弦会于十一晖，则羽与散羽应也。<sup>①</sup>

虽然“正调”是以三弦为宫，但传统上，琴家历来按弦的顺序，将第一弦称为“宫”，其后依次称为商、角、徵、羽、少宫、少商。所以在上面这段文字中，给定了一个明确条件，即每间隔一弦，两条弦之间，一弦为散声，另一弦十徽按音相应，除了第五弦与第三弦十一徽按音相应。“则一与三者，角与散角应也”，应该理解为一弦上的清角音（第十徽）与三弦散声相应，这里的“角”实为“清角”。从这段文字可以判断，对于一弦与六弦之间的倍、半关系，已是不言自明的，所以不必刻意强调一弦与六弦倍、半相应。一弦第十徽相对弦长为 $\frac{3}{4}$ ，第十一徽相对弦长为 $\frac{4}{5}$ ，根据这几点，可以将以上条件整理如下，顺序稍作调整：

① 《宋史·乐志第九十五·乐十七》，引自《二十五史》，上海古籍出版社，1986年。



①一与三者，角（清角）与散角（散清角）应也：

$$\begin{aligned} (\text{散清角}) \text{ 三弦散声相对波长} &= \text{一弦散声相对波长} \times \frac{3}{4} = 1 \times \\ \frac{3}{4} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

②二与四者，徵与散徵应也：

$$\begin{aligned} (\text{散徵}) \text{ 四弦散声相对波长} &= \text{二弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}; \quad \frac{2}{3} = \\ \text{二弦散声相对波长} &\times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{二弦散声相对波长} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

③四与六者，宫与散少宫应也：

$$\begin{aligned} (\text{散少宫}) \text{ 六弦散声相对波长} &= \text{四弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{2} \\ &= \text{四弦散声相对波长} \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{四弦散声相对波长} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

④其第三、第五弦会于十一晖，则羽与散羽应也：








$$\begin{aligned} (\text{散羽}) \text{ 五弦散声相对波长} &= \text{三弦散声相对波长} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \times \\ \frac{4}{5} &= \frac{3}{5}; \end{aligned}$$

⑤五与七者，商与散少商应也：

$$\begin{aligned} (\text{散少商}) \text{ 七弦散声相对波长} &= \text{五弦散声相对波长} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \\ &\times \frac{3}{4} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

将上述各弦的推算结果列表显示如下：

表 45.

校正值		+0.02	-0.01	+0.01	-0.08		-0.09
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

这个定弦法所构成的音阶，前六弦或后五弦并不存在数理矛盾，但第二弦与第七弦之间的倍、半关系却被破坏了。第二弦音高的确定是通过 Fa、Do、So、Rai 连续的纯四五度相生获得；第七弦则是由 Fa、La、Rai 的小三和弦关系调出（即“其第三、第五弦会于十一徽……五与七者”两句调出）。将三、五、七三弦关系列表如下：

表 46.

借用唱名	Fa	La	Rai
弦 序 号	三	五	七
散声相对波长	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$
	$= \frac{15}{20}$	$: \frac{12}{20}$	$: \frac{9}{20}$
	$= (5$	$: 4$	$: 3) \times \frac{3}{20}$

括号里的比例式正是我们早已熟悉的小三和弦的第一转位模式。

这种定弦法在古代有一定的代表性，不只是朱熹叙述了这样

的定弦法，姜夔在《侧商调古怨》的谱前小序也运用第十一徽定弦法<sup>①</sup>，在《太音大全集》（刊印于1413年）中也提到了同样的定弦法。<sup>②</sup>

以上两种定弦法，都表明了，在琴学理论的摸索中，存在着阶段性的认识局限，缺少理论与实践的贯通，才会有这种顾此失彼的数理逻辑矛盾。

## 二、《五知斋琴谱》中记载的调弦法

《五知斋琴谱·调弦法·卷一》<sup>③</sup>：“……先用大间，散挑七弦，而左大指按四弦九徽……先以七、四两弦于九徽扣准，籍此作主，更不可改动。次用小间，散挑六弦，名指按四弦于十徽，宽紧只六弦收放，而四不动也。次又挑七弦，名指按五弦于十徽，又五弦收放……七不动矣。四、五、六、七皆已和准，方用大间挑六弦。按三弦于九徽，或挑五弦，名指按三弦于十徽八分应之。宽紧只宜收放三弦……再用大指托七弦，中指按二弦于七徽。泛音实音皆可。宽紧动二弦。六一<sup>④</sup>两弦亦如之。”

这段话介绍了调弦的方法：

①七弦散声应四弦九徽按音；

① 《白石道人歌曲》卷二，四部丛刊本。

② 见《太古大全集·调弦第二十三》。

③ 《五知斋琴谱》徐琪编，康熙六十年（1721年）首次刊印，本文引自雍正二年（1724年）红杏山房藏版影印版，调弦法卷一金十四～十五。

④ 原文为“六二”，据两弦相应关系校勘为“六一”。

- ②六弦散声应四弦十徽按音；
- ③七弦散声应五弦十徽按音；
- ④六弦散声应三弦九徽按音；
- ⑤五弦散声应三弦十徽八分按音；
- ⑥七弦散声应二弦七徽按音；
- ⑦六弦散声应一弦七徽按音。

根据已知条件，一弦的相对波长为 1，从表 42 中可以查到一弦各徽的相对波长，按原编号以下列顺序求各弦：

$$\text{⑦六弦散声相对波长} = \text{一弦散声相对波长} \times \text{一弦七徽相对弦长} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{②六弦散声相对波长} = \text{四弦散声相对波长} \times \text{一弦十徽相对弦长}$$

$$\text{四弦散声相对波长} = \text{六弦散声相对波长} \div \text{一弦十徽相对弦长} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{①七弦散声相对波长} = \text{四弦散声相对波长} \times \text{一弦九徽相对弦长} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\text{③七弦散声相对波长} = \text{五弦散声相对波长} \times \text{一弦十徽相对弦长}$$

$$\text{五弦散声相对波长} = \text{七弦散声相对波长} \div \text{一弦十徽相对弦长} = \frac{4}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{16}{27}$$

$$\text{④六弦散声相对波长} = \text{三弦散声相对波长} \times \text{一弦九徽相对弦长}$$



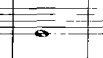
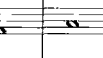


$$\begin{aligned} \text{三弦散声相对波长} &= \text{六弦散声相对波长} \div \text{一弦九徽相对弦长} \\ &= \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

⑥七弦散声相对波长 = 二弦散声相对波长  $\times$  一弦七徽相对弦长

$$\begin{aligned} \text{二弦散声相对波长} &= \text{七弦散声相对波长} \div \text{二弦七徽相对弦长} \\ &= \frac{4}{9} \div \frac{1}{2} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

整理以上结果，七弦的定弦关系如下表：

表 47.

校正值		+02	-01	+01	+03		+02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

从以上整理的结果来看，这个正调的调弦方案完全以三分三  
倍生律法为数理规范。上文中第⑤个条件：五弦散声应三弦十徽  
八分按音，说明三弦十徽八分的按音相对波长与五弦散声为同一  
音高。

既然已经得到各弦散声的相对波长，那么每弦上的十三徽位  
按音的相对波长也就不难求出。只要将表 42 中的数值依次乘以各  
弦的散声相对波长，就可以秩序井然地列出古琴七条弦的散声相  
对波长、每弦上十三徽音位的相对波长以及琴五调变化后的相对  
波长。根据表 42 和表 47 可以逻辑相生出 7 张表格。（见附录一）

### 三、《琴学入门》中记载的调弦法

《琴学入门·调和弦法》：“初安五弦以不松不紧为度，松则安至第一弦太慢无声，紧则安至第七弦太急而断。再安六弦，如滚按拨，左手名指按位，大指拨其散按两弦是也，以次皆然。先按五弦十二晖，次拨六弦散声及五弦按音，两相应为准。如音在五弦十二晖上相应，则六弦散声紧，宜松；在十二晖下相应，则六弦散声松，宜紧矣。次安七弦，其松紧以与五弦十晖相应为准。此五六七弦逐一拴于右边雁足，然后安一弦，按其八晖，与五弦散声相应为准。如按应在晖上，则散弦紧而按弦松，宜紧按弦；应在晖下，则散弦松而按弦紧，宜松按弦。次安二弦，按二弦九晖，与五散声相应。次安三弦，按三弦十一晖，与五弦散声相应。次安四弦，按四弦十三晖，与五弦散声相应。或按四弦十晖，与六弦散声相应。”<sup>①</sup>

这段文字介绍的调弦法与《五知斋琴谱》中的记载有较大区别，数次提到与某弦十二徽、十一徽、八徽相应，甚至要与十三徽相应，这意味着该文献的律学规范是以纯律为主，甚至超越了纯律的范围。关于与十三徽相应的要求暂且略过，先根据上文记录的步骤分析这种定弦结果。

根据给定的条件，可以理出这样的关系：

<sup>①</sup> 《琴学入门·调和弦法·十二~十四》，同治三年刻本。

①六弦散声应五弦十二徽按音；

②七弦散声应五弦十徽按音；

③五弦散声应一弦八徽按音；

④五弦散声应二弦九徽按音；

⑤五弦散声应三弦十一徽按音；

⑥六弦散声应四弦十徽按音。

仍然从已知条件入手，先求与一弦某徽相应的弦，同样，从表 42 中查到一弦各徽的相对波长，按原编号以如下顺序求各弦：

③五弦散声相对波长=一弦散声相对波长×一弦八徽相对弦长

$$=1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

②七弦散声相对波长

$$=五弦散声相对波长 \times 一弦十徽相对弦长 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

①六弦散声相对波长

$$=五弦散声相对波长 \times 一弦十二徽相对弦长 = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

⑥六弦散声相对波长

$$=四弦散声相对波长 \times 一弦十徽相对弦长$$

四弦散声相对波长

$$=六弦散声相对波长 \div 一弦十徽相对弦长 = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

⑤五弦散声相对波长

$$=三弦散声相对波长 \times 一弦十一徽相对弦长$$

三弦散声相对波长

$$= \text{五弦散声相对波长} \div \text{一弦十一徽相对弦长} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$



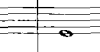
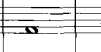



④五弦散声相对波长

$$= \text{二弦散声相对波长} \times \text{一弦九徽相对弦长}$$

$$\begin{aligned} \text{二弦散声相对波长} &= \text{五弦散声相对波长} \div \text{一弦九徽相对弦长} \\ &= \frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

整理以上结果，七弦的定弦关系如下表：

表 48.

校正值		-.09	-.01	+.01	-.08		-.09
借用记谱							
相对音高	0	0.91	2.49	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

与《五知斋琴谱》中记载的调弦法相比，第二、五、七弦有不同的规范。二、三、五、七诸弦正好符合纯律小三度的律学规范，对这几弦可以做出这样的律学分析：

表 49.

借用唱名	Rai	Fa	La	Rai
弦 序 号	二	三	五	七
散声相对波长	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$
	$= \frac{18}{20}$	$: \frac{15}{20}$	$: \frac{12}{20}$	$: \frac{9}{20}$
	$= (6$	$: 5$	$: 4$	$: 3) \times \frac{3}{20}$



括号里的比例式正是我们早已熟悉的小三和弦的模式。

从整理的结果来看,《琴学入门》中记载的正调调弦方案是以三分三倍及五分生律法为数理规范。这是自《淮南子》以来,又一则明确的纯律理论的文献记载。虽然在早前的《琴律说》中已经有纯律的定弦步骤,但由于整个步骤中存在着内在的逻辑矛盾,所以,作为严密的理论表述,当推《琴学入门》这部文献。如果说《淮南子》律数中出现纯律因素有其偶然性,那么,《琴学入门》这个文献则完全应该视为理性的提炼,是一则关于纯律理论与实践的详确史料。

从一些琴谱中的音律分析和对现代琴人的采访结果看,上述记录在《五知斋琴谱》和《琴学入门》中的两种调弦法仍然存在于现实生活中。

根据以上两种文献记载,我们得知琴的“正调”有两种律学内涵,而以“正调”为基础的紧、慢某弦的琴五调定弦,每种调也都可能产生一种或两种规格的定弦结果。

#### 四、琴五调的定弦方法

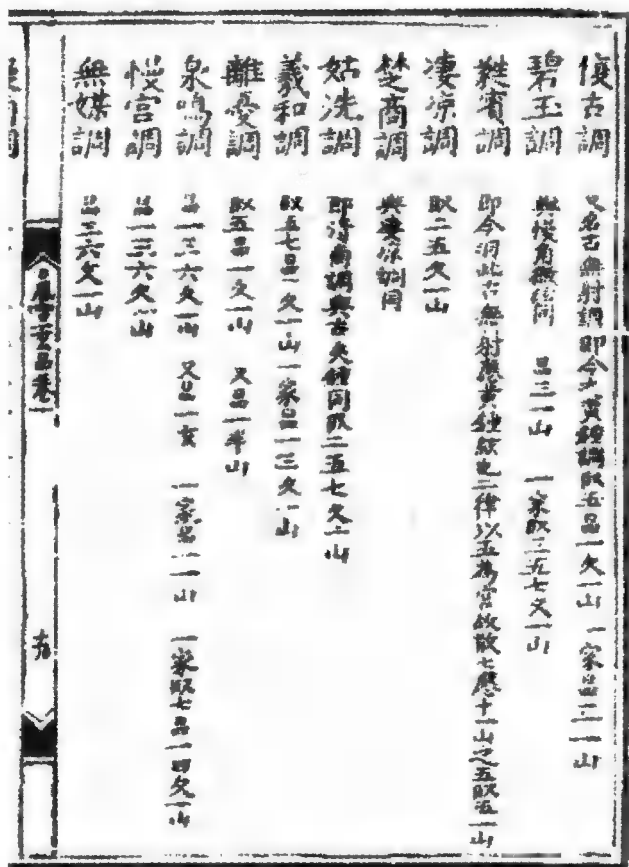
前文已经提到,在“正调”的基础上,通过紧、慢某弦或某若干弦会得到多种定弦方案。这些定弦方案基本是以“清角为宫”和“变宫为角”这两种连续旋宫方式;还有一类特殊变体,调出来的七弦散声音阶不合常规的五声音阶规范。

##### 1. 以紧某弦为特征的“清角为宫”式调弦方案

以紧某弦为特征的“清角为宫”式调弦方案有紧五弦的“清羽调”,也称“金羽调”、“今羽调”、“蕤宾调”;紧二、五、七弦

的“夹钟调”，也称“姑洗调”、“清商调”。在《风宣玄品》和《太音大全集》中都记载了相关的调弦步骤。按照《五知斋琴谱》和《琴学入门》所记述的不同定弦方案，按照文献中所介绍的步骤，可以求出各调的定弦，有的调就存在着两种规定。以下逐一列出各种定弦结果，律学解析过程略去。

图 16. 《风宣玄品》



## A. 清羽调。紧五弦

《风宣玄品·卷一·琴调徽弦·外调转弦》记载了定弦的关键步骤，如图 16<sup>①</sup>。








将文中谱字翻译为：“蕤宾调：即今羽，此古无射应黄钟弦也，二律以五为宫，故散七应十一徽之五，紧五一徽。”

根据“散七应十一徽之五”这个条件，可以写出等式：

$$\text{七弦散声相对波长} = \text{五弦散声相对波长} \times \frac{4}{5}$$

$$\text{五弦散声相对波长} = \text{七弦散声相对波长} \div \frac{4}{5} = \frac{4}{9} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{9}$$

表 50. 以《五知斋琴谱》方案定弦

校正值		+02	-.01	+01	+09		+02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	5.09	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	Ta	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

以这种方案，二、四、五、七弦散声会构成纯律小三和弦第二转位：

① 《风宣玄品·卷一·琴调徽弦》，江安傅越凡抄自嘉靖十八年（1539年）原刻本，1931年抄。

表 51. 《五知斋琴谱》定弦方案的和声可能性

借用唱名	Rai	So	Ta	Rai	
弦 序 号	二	四	五	七	
散声相对波长	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	
=	$\frac{8}{9}$	: $\frac{6}{9}$	: $\frac{5}{9}$	: $\frac{4}{9}$	
=	(8	: 6	: 5	: 4)	$\times \frac{1}{9}$

若以《琴学入门》方案定弦，五弦相对波长为 $\frac{9}{16}$ 。

以这种方案，三、五、七弦散声则构成纯律大三和弦第二转位：

表 52. 《琴学入门》定弦方案的和声可能性

借用唱名	Fa	Ta	Rai
弦 序 号	三	五	七
散声相对波长	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{20}$
=	$\frac{9}{12}$	:	$\frac{9}{16}$ :
			$\frac{9}{20}$
=	$(\frac{1}{3}$	:	$\frac{1}{4}$ :
			$\frac{1}{5}) \times \frac{9}{4}$

括号里的分数连比式正是我们早已熟悉的大三和弦模式的第二转位。

#### B. 清商调。紧二、五、七弦

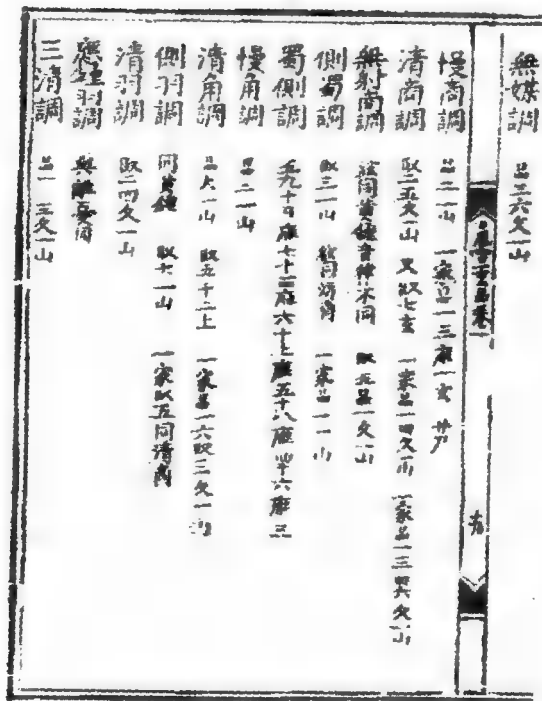
《风宣玄品》记载了定弦的关键步骤（见图 17）：

将图中减字谱文字翻译成陈述性文字：“清商调：紧二、五各一徽又紧七弦，一家慢一、三、四、六各一徽。”这两句话透

露的信息是，紧二、五、七弦与慢一、三、四、六弦可以看作同一个调。但这只是实践上的一种认识，就律学意义而言，这二者之间既有共同之处，又有不同之处。

《神奇秘谱·霞外神品下卷·姑洗调》中记载：“姑洗调：神品姑洗意，即清商意。与古夹钟同，紧二、五、七各一徽。散挑七，名十勾五应；散挑七，大八九勾四应；散挑四，名十一勾二应。”<sup>①</sup>

图 17. 《风宣玄品》



① 《神奇秘谱》，成书于 1425 年。引自《琴曲集成》第一册第 164 页。此处已将减字谱转译为文字叙述。

《西麓堂琴统·卷二十·夹钟》记载：“夹钟调曲谱：紧二、五、七各一徽，此夹钟弦也，俗谓清商调。按夹钟、姑洗以二为宫，故以散四应十一徽之二。姑洗调：紧二、五、七各一徽。转弦法：……以散七应十徽之五，以散五应十徽之三，以散四应十一徽之二。”<sup>①</sup>

这两个文本中都强调了四弦散声应二弦十一徽，这是非常关键的一步，可以解析为：

$$\text{四弦散声相对波长} = \text{二弦散声相对波长} \times \frac{4}{5}$$








$$\text{二弦散声相对波长} = \text{四弦散声相对波长} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$$

$$\text{七弦散声的相对波长以倍、半关系求得，为} \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$\text{七弦散声相对波长} = \text{五弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{五弦散声相对波长} = \text{七弦散声相对波长} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$$

表 53.

校正值		+0.08	-0.01	+0.01	+0.09		+0.08
借用记谱							
相对音高	0	1.58	2.49	3.51	5.09	6	7.58
借用唱名	Do	Mai	Fa	So	Ta	Do	Mai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$

① 《西麓堂琴统》明刻本，现收入《琴曲集成》第三册，见第 220 页。此处已将减字谱转译为文字叙述。

第二、四、五、七弦散声正好构成纯律大三和弦：

表 54.

借用唱名	Mai	So	Ta	Mai
弦 序 号	二	四	五	七
散声相对波长	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$
=	$\frac{10}{12}$	: $\frac{10}{15}$	: $\frac{10}{18}$	: $\frac{10}{24}$
=	$(\frac{1}{4}$	: $\frac{1}{5}$	: $\frac{1}{6}$	: $\frac{1}{8}) \times \frac{10}{3}$

## 2. 以慢某弦为特征的“变宫为角”式调弦方案

以慢某弦为特征的“变宫为角”式调弦方案有慢三弦的“慢角调”，又称“碧玉调”；慢一、三、六弦的“慢宫调”，又称“泉鸣调”、“夷则调”。《太音大全集》、《神奇秘谱》、《西麓堂琴统》都记载过相关的定弦步骤，通过对文献的解读，可以得到各调的定弦结果。

### C. 慢角调。慢三弦

《神奇秘谱·霞外神品下卷·碧玉调》记载：“碧玉调：慢三一徽，散挑五，名十勾三应。”<sup>①</sup> 意即五弦散声与三弦十徽相应；《西麓堂琴统·卷二十二·大吕调曲谱》则记载：“大吕调曲谱，慢三一徽。按黄钟、太簇、大吕以一为宫，故散三应十一徽之一。俗为慢角调。”<sup>②</sup> 即三弦散声与一弦十一徽相应。根据这两种条件，可以调出两种结果来。

① 《琴曲集成》第一册第 153 页，此处已将减字谱转译为文字叙述。








② 《琴曲集成》第三册第 217 页，此处已将减字谱转译为文字叙述。

(1) 以《五知斋琴谱》定弦方案为基础, 用五弦散声与三弦十徽相应:

$$\text{五弦散声相对波长} = \text{三弦散声相对波长} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{三弦散声相对波长} = \frac{16}{27} \div \frac{3}{4} = \frac{64}{81}$$








表 55. 慢角调七弦

校正值		+0.02	+0.04	+0.01	+0.03		+0.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.04	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

(2) 以《五知斋琴谱》定弦方案为基础, 用三弦散声与一弦十一徽相应:

$$\text{三弦散声相对波长} = \text{一弦散声相对波长} \times \frac{4}{5} = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

表 56. 慢角调七弦

校正值		+0.02	-0.07	+0.01	+0.03		+0.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	1.93	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

(3) 以《琴学入门》定弦方案为基础, 兼用两种方法得到两种同样结果:



表 57. 慢角调七弦

校正值		-.09	-.07	+.01	-.08		-.09
借用记谱							
相对音高	0	0.91	1.93	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

## D. 慢宫调。慢一、三、六弦

《西麓堂琴统》记载了定弦的过程：“夷则调：慢一、三、六各一徽。此古夷则也，俗谓之慢宫调。按夷则、南吕以四弦为宫，故散六应十一徽<sup>①</sup>之四。泉鸣调：慢一、三、六各一徽。散挑三，中九勾一应。散挑五，名十勾三应。散挑六，名十一勾四应。”<sup>②</sup> 根据对原文的分析，“慢宫调”只能在《琴学入门》的定弦方案基础上获得。

表 58. 慢宫调七弦

校正值	-.06	-.09	-.07	+.01	-.08	-.06	+.02
借用记谱							
相对音高	-0.56	0.91	1.93	3.51	4.42	5.44	7.02
借用唱名	Ti	Rai	Mi	So	La	Ti	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声 相对波长	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{9}$

① 原文为“十二徽”，校勘为“十一徽”。

② 《琴曲集成》第三卷第 207 页，《西麓堂琴统·卷十九·夷则》，此处已根据减谱字转译为叙述文字。

从以上对相关文献的梳理，能够清楚地看出，随着时间的推移，文献中记载的方法呈现出从对律制的不确定到作出确切选择，以保证定弦符合严密的逻辑规范。

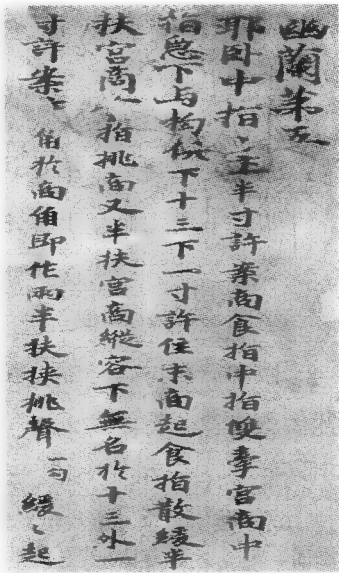
### 第三节

## 暗徽的设置

#### 一、纯律规范的徽外音

古琴上除了这十三明徽，还有很多按音指位，这就是暗徽，最早的存谱《碣石调·幽兰》中已经有“暗徽”这个名词。从文献记载看，“暗徽”是由少渐多的。《琴书大全》中辑录了晚唐琴家陈拙（约公元9世纪）《琴籍》中的《明徽暗徽法》。其中提到在十三明徽的每两徽间，可以从五种音位中选用，即为“徽近上、徽中间、徽近下、徽中间上少许、徽中间下少许，当

图 18. 《碣石调·幽兰》



应二十三暗徽也”，加在一起，明徽暗徽共有三十六徽。此外，还有两暗徽，分别是从小一徽到岳山、十三徽到龙龈二者间均分为五段，取近徽一段，前者称“上暗徽”，只用作泛音；后者称“下暗徽”，即“徽外”，按、泛音皆用。（见图18）

《琴书大全·琴徽·琴徽三·明徽暗徽法》记载：

凡指按弦对徽，为应必先明二十三暗徽与十三明徽共为三十六分，上中下按之。折徽法云，三折相目七四一，从岳里至龙龈里折回中心定为七徽，名曰下清一十二徽。再从七徽至岳折回中心定为四徽，名曰中平清一十二徽。又从四徽至岳折回中心定为一徽，名曰上极清一十二徽，分为三倍。黄钟之声，谱中写徽近上、徽中间、徽近下、徽中间上少许、徽中间下少许，当应二十三暗徽也。夫声之清浊，大小相应，皆是明徽暗徽所生，故七弦应徽所以取声和也。除三十六徽外，别有二暗徽。至岳匀分五段，取近徽一段，正谓之上暗徽，名曰徽外，唯泛使之；十三徽至龈匀分五段，取近（徽）一段，正谓之下暗徽，亦名徽外，举按泛声使之。《秋思弄》中上暗徽上独泛一声，《神人畅》中上下暗徽上各泛一声。两谱泛声皆名神授声。《幽馆操》中上下暗徽上独泛一声。<sup>①</sup>

由于只有这两个音位是对暗徽的最明确表述，我们也可以对此做出律学分析：

---

① 《琴书大全·第六卷·琴徽·琴徽三·明徽暗徽法》，标点由笔者添加。

“下暗徽”相对弦长

$$\begin{aligned}
 &= \text{十三徽相对弦长} + [(\text{全弦弦长} - \text{十三徽相对弦长}) \div 5] \\
 &= \frac{7}{8} + [(1 - \frac{7}{8}) \div 5] = \frac{7}{8} + (\frac{1}{8} \div 5) = \frac{7}{8} + \frac{1}{40} = \frac{35+1}{40} \\
 &= \frac{9}{10}
 \end{aligned}$$

此暗徽的律学规定是按音为小全音，相对音高=0.91 全音；泛音为三个八度又纯律大三度，即相对波长为 $\frac{1}{10}$ ，相对音高为 $3 \times 6 + 1.93 = 19.93$  全音。

“上暗徽”相对弦长

$$\begin{aligned}
 &= \text{一徽相对弦长} - \text{一徽相对弦长} \div 5 \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \div 5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{40} = \frac{5-1}{40} = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

泛音音高为 19.93 全音。

相对弦长为 $\frac{9}{10}$ 的徽外音，距离十三徽的绝对弦长为一寸一分二厘五，这个音在《碣石调·幽兰》中被描述为“十三外一寸许”<sup>①</sup>。（图 18.《碣石调·幽兰》谱局部“幽兰第五”，第二行有“十三下一寸许”，第三行为“十三外一寸许”）

## 二、《琴统·十则》中的明暗徽及三分损益律的徽外音

徐理在《琴统·十则》（1268 年成书）中进一步提出“琴有十则，节四十五，同者十有四，得位者三十有一。夫十数者天地

<sup>①</sup> 《琴曲集成》第一册第 4 页。

生成之。”<sup>①</sup>对每一则都做出尺寸或徽位的详细解说。这三十一个音位中除了十三个明徽，还有十八个暗徽。

在这十则中对弦长的划分增加了七等分、九等分和十等分。根据这个提示，我们仍然可以逐一解析：

第七则原文：“七而分之各得六寸四分二厘八毫余四。”将弦长等分为七，可得到 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{6}{7}$ 各个节点，如果只是用作泛音，相对音高为 16.84 全音 = 12 + 4.84 全音；若用于按音， $\frac{5}{7}$  的相对音高为 2.91 全音； $\frac{6}{7}$  的相对音高为 1.33 全音，介于第十二、十三徽间。

第九则原文：“九而分之各得五寸。”将弦长等分为九，则得到新的按音相对弦长 $\frac{5}{9}$ ，相对音高为 5.09 全音； $\frac{7}{9}$  的相对音高为 2.18 全音。同时，还有一个三分损益律的徽外音 $\frac{8}{9}$ 。这个“徽外音”距离十三徽的绝对长度为六分二厘五，在《碣石调·幽兰》中被描述为“十三下半寸许”。

第十则原文：“十而分之各得四寸五分。”将弦长等分为十，则得到新的按音节点，相对弦长为 $\frac{7}{10}$ ，相对音高为 3.09 全音，介于第九、十徽间。

十三徽设置中不用七等分，反映出音律探索中的理性选择。徐理的《琴统十则》虽然得出了更多的弦长比规定，但从方法论

<sup>①</sup> 《西麓堂琴统·琴谱卷一·十则》，见《琴曲集成》第三册第 10 页。

而言，并无新意，只是循着十三明徽的设置思路，机械地连续等分，虽然出现了七分七倍生律，但既不能说是出于系统化、理论化的律制构建，也难说是出于明确的音乐实践要求。而从各家琴谱来看，徐理的《琴统十则》并没有对音乐实践产生太多影响。

符合三分损益律和纯律两种规范的徽外音在演奏的实践中，有各自相谐的徽位，“十三下半寸许”之徽外音在后来强调五度相生律为重的音乐实践中用得更为广泛。

### 三、十分法的徽分

对于古琴演奏中所用的徽间音位，清代以前的琴谱没有清晰统一的命名法。《碣石调·幽兰》中有时以两徽间来表示音位，如“九十间”，意为在第九、第十两徽间取音；或是以长度描述来表示音位，如“八上一寸许”或“上半寸许”，意为第八徽向右上约一寸或半寸取音。比较起来，后一种记谱更精确。《碣石调·幽兰》谱和陈拙《琴籍·明徽暗徽法》中反映出在每两徽间有五个音位可以选择，如“上豆许”、“上半寸许”、“下半寸许”、“上一寸许”、“下一寸许”或“徽近上、徽中间、徽近下、徽中间上少许、徽中间下少许”等等。而从1673年徐上瀛刊印《大还阁琴谱》起，已经创用了“徽分”，即在每两徽间十等分形成九个区间，这样，原有的五种音位就增加到九种。自此，古琴上从岳山到龙龈二者间就有一百三十个音位。虽然实际演奏并不会用到一百三十个音位，但古琴这种乐器所提供的音体系已经被人们完全掌握并以“徽分”运用的技法物化显现出来，常用的就有三分三倍、五分五倍的各种徽分。

## 第四节

# 具有多维生律因素的琴律

从表 42 可以一目了然地看到，琴律是一种含三分三倍、五分五倍甚至更多生律因素的体系，仅以十三明徽而言，就已经出现了七倍音，而在丰富的徽分音位上，数理规定的多样性包括了在其他章节中提到的各种生律因素。

阿拉伯人所运用的量音理论，在中国古琴上也是古来有之的。虽然十三徽是在发现分段振动的客观规律后有了理论的引导而设置的，但古琴从来就是以按音为主要演奏技巧，在认识泛音规律的同时，也同样有充分条件观察到在同样的节点处按弦形成与泛音成倍数的音程。按住某徽，剩下的有效弦长可以产生某种音程，如此，也就把握住了长度比变化与音程关系之间的规律。虽然古琴并不用量音术来定弦，但在以量振动段长度来理解音律间的音程关系方面是异曲同工的。

琴工自古相传、确定徽位的“摺纸法”是朴素地用来运算琴律弦长比值的简单整数比的计算方法。产生于公元 5~6 世纪的琴曲《碣石调·幽兰》谱所记录的在十三个徽位上广泛运用泛音的事实，也证明了古人很早就已使用这种律制，但“琴律”这个

律学名词却是迟至南宋，由朱熹在其著作《琴律说》中首次提出。被后世尊为“正调”的调弦，传统上有两种调弦法，一为《管子·地员篇》所记述的五音关系，特征是二弦（相对波长为 $\frac{8}{9}$ ，D）、五弦（相对波长为 $\frac{16}{27}$ ，A）为三分损益法所生；另一种为琴家所传，特征是二弦（相对波长为 $\frac{9}{10}$ ，D）、五弦（相对波长为 $\frac{3}{5}$ ，A）合纯律规范。据考证，这种调弦法至迟在春秋战国期间就已出现了。至清晚期，这种定弦法被详细地记载在《琴学入门》中，在前面的内容中已进行了具体的律学分析。这两种调弦法在琴家手中世代相传，从大量琴谱中可以看到综合运用情况。

### 一、朱熹《琴律说》

中国历代乐志律志不间断地记载了一直发展的三分损益律理论，而关于琴律的信息却只是散见、且是偶见于零星的经、子之书，然而琴律的民间理论与实践却一直与占统治地位的三分损益律平行发展，越来越多的出土资料也证明了这一点。从以琴律为物质基础和理论基础定律的编钟研究以及大量琴学文献的律学解读，琴律理论的发展脉络也渐显明晰。

朱熹（1130～1200年）的《琴律说》第一次把“琴律”这个术语立说于著作中，标志着琴律学终于从实践走向理论的殿堂。他在这部著作中称一弦十一徽（ $\frac{4}{5}$ ，Mi）为姑洗，这个纯



律大三度显然不同于三分损益律的姑洗 ( $\frac{64}{81}$ , Mi), 在漫长的以三分损益律为权威法则的律学史中, 这是第一次明确强调黄钟至姑洗的另一种律学规范。他还提到在一弦之中有下、中、上三准相隔纯八度, 五声十二律在上、中、下三准之间为次第八度<sup>①</sup>, 那么, 姑洗在这三准之间分别得自十一徽 ( $\frac{4}{5}$ )、六徽 ( $\frac{2}{5}$ )、三徽 ( $\frac{1}{5}$ ); 《琴律说》中有一句话体现了中国式独有的纯律小三度直接生律途径: “五弦则南吕之律因起于龙龈而为羽之初矣, 黄清少宫则应于十二。”五弦散声为南吕 (La), 黄钟应于十二徽 (Do), 相对弦长为  $\frac{5}{6}$ , 这种传统与曾侯乙编钟测音所体现出的小三度基本上以纯律规范为多是一致的, 似乎不能只看作是巧合, 而应该与钟律以弦定律这个实践相联系。另一个例证是, 三分损益律仲吕 ( $\frac{131072}{177147}$ ,  $\sharp$  Mi) 不能复生黄钟, 而古琴三弦的仲吕 ( $\frac{3}{4}$ , Fa) 为三倍反生, 可以复生黄钟。这些都说明琴上的律名都具有三分三倍、五分五倍律制的特点。自从《淮南子》律数中出现纯律因素, 朱熹的《琴律说》是首次明确记载生律因素多样化的琴律文献。

---

① 原文为: “……七弦者, 一弦之中又各有五声十二律者凡三焉。……若七徽之后以至四徽之前, 则五声十二律之应, 亦各于其初之次而半之。……四徽之后以至一徽之前, 则其声律之应, 次第又如其初, 而又半之。”《晦庵集·卷六十六·琴律说》约 1190 年, 《四部丛刊》本。

## 二、《琴书大全》中留下的详细数据<sup>①</sup>

在清初创用“徽分”记写徽间音位之前，减字谱关于徽分音位的记写多是模糊的，只是大略表述为在某两徽间。但琴律研究并没有忽略徽间音位的作用，而有关这方面较早和最详细的记载可能要算编撰于明代的《琴书大全》了。

在蒋克谦生活的时代（1590 年左右），虽然还没有“徽分”这个术语，但他对于徽间的弦长计算已经精确到以尺为单位的小数点后第三位——“厘”单位。

由于蒋克谦用文字叙述的方式记写这套经过实验总结得到的计量方法，其间的逻辑关系很难展示出来，这里将以严格的数学形式再现出这部文献中的知识结晶。同时，这套数据也充分体现了琴上多维生律的特征以及运用。

1. 五弦与十二律的对应关系以及反应在一弦上的相对弦长  
《琴书大全·卷第二·声律上·十二律五弦还宫要诀·二十四》：

“先定五弦各为宫所用尺专以朱文公四尺五寸之数约为则

第一弦自岳至龈，散声为黄钟宫，大吕、太簇共弦，若用共弦之律为宫，其弦法不改，但大吕则诸弦皆紧于黄钟一律，太簇则诸弦皆紧于黄钟二律，后仿此。  
第二弦散声与按第一弦正十二徽相应为夹钟宫，姑洗共

<sup>①</sup> 这部分内容引自笔者发表在 2003 年第 3 期《音乐艺术》上的一篇独立文章《以现代律学的方法解读蒋克谦〈琴书大全〉中所传以徽间徽外寸分厘数》。

弦；第三弦散声与按第一弦十徽，于十徽微上声同相应为仲吕宫，蕤宾、林钟共弦；第四弦散声与按第一弦九徽上一寸八分四厘相应为夷则宫，南吕共弦；第五弦散声与按第一弦八徽上二寸相应为无射宫，应钟共弦。”

这段话描述了定五弦的过程，作者蒋克谦是以一弦的相对弦长规定其他几弦各自的散声（相对波长），即文中的“第…弦散声与按第一弦…徽……相应为……宫”，那么各弦与一弦的关系为：

一弦散声相对波长为黄钟宫

二弦散声相对波长为夹钟宫＝一弦十二徽的相对弦长

三弦散声相对波长为仲吕宫＝一弦十徽微上的相对弦长

四弦散声相对波长为夷则宫

＝一弦九徽上一寸八分四厘的相对弦长

五弦散声相对波长为无射宫＝一弦八徽上二寸的相对弦长

虽然蒋克谦提供的是以绝对弦长数值（朱文公尺四尺五寸）表达弦长，我们可以将绝对弦长数值折合成相对弦长数值，方法是：设一弦空弦全长（从龙龈到岳山的距离）为 1，从某按音（徽位或徽间音位）到岳山的距离是全弦长的几分之几，这个数值就是按音的相对弦长。在前边我们已经获得了这样的认识：相对弦长数值（中国古代表达为律数）＝相对波长数值。在面对古琴这种乐器，由多根等长的弦在一起比较音程关系时，必需由相对弦长的概念上升到相对波长，在以一弦散声相对波长为 1 的条件下，各弦各徽位上的音高皆可以在一个逻辑系统内表达。

参照表 42 中的徽位规定，可以对上述等式右边的按音之绝对弦长作如下折算：

## ①黄钟律，第一弦散声为宫

绝对弦长为 4.5 尺，相对弦长为 1，相对波长为 1；

## ②夹钟律，第二弦散声为宫

二弦散声相对波长

=一弦散声相对波长 $\times$ 一弦正十二徽的相对弦长

$$=1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{一弦十二徽的绝对弦长} = 4.5 \text{ 尺} \times \frac{5}{6} = 3.75 \text{ 尺}$$

一弦十二徽的相对弦长化为小数 0.8333333（由分数化为循环小数）

## ③仲吕律，第三弦散声为宫

三弦散声相对波长

=一弦散声相对波长 $\times$ 一弦十徽微上的相对弦长

$$\approx 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{一弦十徽微上的绝对弦长} = 4.5 \text{ 尺} \times \frac{3}{4} = 3.375 \text{ 尺}$$

一弦十徽微上的相对弦长约为 0.75

## ④夷则律，第四弦散声为宫

四弦散声相对波长

=一弦散声相对波长 $\times$ 一弦九徽上一寸八分四厘的相对弦长

$$\text{九徽的绝对弦长} = 4.5 \text{ 尺} \times \frac{2}{3} = 3 \text{ 尺}$$

一弦九徽上一寸八分四厘的绝对弦长

$$= 3 \text{ 尺} - 0.184 \text{ 尺} = 2.816 \text{ 尺}$$

相对弦长为  $2.816 \text{ 尺} \div 4.5 \text{ 尺} = 0.625778$ （由分数化为循环小数，小数点后最后一位四舍五入）

按照琴律定律的一般规范有两个结果：（分数化为小数，以便于比较大小）

$$\text{a. } \frac{5}{8} = 0.625 \quad \text{b. } \frac{81}{128} = 0.6328125$$

与蒋克谦所传数据相比，取前者  $\frac{5}{8}$ ，八徽相对弦长为 0.6，徽分推算过程为（参照图 15 中各徽间的距离，八徽至九徽之间为  $\frac{1}{15}$ 。）：

$(0.625 - 0.6) \times 15 = 0.375$ ，写成徽分，即八徽四分；等于一弦八徽四分。

⑤无射律，第五弦散声为宫

五弦散声相对波长

= 一弦散声相对波长  $\times$  一弦八徽上二寸的相对弦长

八徽的绝对弦长 =  $4.5 \text{ 尺} \times \frac{3}{5} = 2.7 \text{ 尺}$

一弦八徽上二寸的绝对弦长 =  $2.7 \text{ 尺} - 0.2 \text{ 尺} = 2.5 \text{ 尺}$

一弦八徽上二寸的相对弦长 =  $2.5 \text{ 尺} \div 4.5 \text{ 尺}$

= 0.555556（由分数化为循环小数）

按照琴律定律的一般规范有两个结果：（分数化为小数，以便于比大小）

$$\text{a. } \frac{5}{9} = 0.555556; \quad \text{b. } \frac{9}{16} = 0.5625$$

与蒋克谦所传数据相比，取前者  $\frac{5}{9}$ ，七徽的相对弦长为

0.5, 徽分推算过程为:

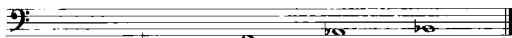
$(0.555556 - 0.5) \times 10 = 0.555556$ , 写成徽分, 即七徽六分, 等于一弦七徽六分。

以上结果用五线谱附加校正值和表格表示:

谱例8.

校正值:

+0.08    -0.01    +0.07    +0.09



相对弦长:

1     $\frac{5}{6}$      $\frac{3}{4}$      $\frac{5}{8}$      $\frac{5}{9}$

表 59. 五弦各为宫, 与一弦相应音位

宫弦	律位	相对波长	第一弦 绝对弦长	第一弦 相对弦长	散声、徽位 和徽分
第一弦散声 为宫	黄钟	1	4.5 尺	1	散声
第二弦散声 为宫	夹钟	$\frac{5}{6}$	3.749999 尺	$\frac{5}{6}$	一弦十二徽
第三弦散声 为宫	仲吕	$\approx \frac{3}{4}$	$\approx 3.375$ 尺	$\approx \frac{3}{4}$	一弦十徽徽上
第四弦散声 为宫	夷则	$\frac{5}{8}$	2.816 尺	$\frac{5}{8}$	一弦八徽四分
第五弦散声 为宫	无射	$\frac{5}{9}$	2.5 尺	$\frac{5}{9}$	一弦七徽六分

不过, 从《琴书大全·十二律五弦还宫要诀》全文来看, 蒋克谦的基本律学观念是以三分损益法为基础的, 所以这段文字还有另一种解读可能。

### A. 相距“小微音差”而归并入与纯律相同的按音音位

若以三分损益相生十二律，从黄钟出发，二弦散声所应律吕为第九次相生而出的夹钟律，相对波长为 $\frac{16384}{19683}$ ，为一弦十二徽上不足一分，与十二徽按音的相对音高相差只有一个“小微音差”，可以归并为十二徽；

四弦散声所应律吕为第八次相生而出的夷则律，相对波长为 $\frac{4096}{6561}$ ，为八徽三分六，与相对波长 $\frac{5}{8}$ 的相对音高也只有一个“小微音差”，在一弦上推算徽分为0.36，所以也归入八徽四分；

五弦散声所应律吕为第十次相生而出的无射律，相对波长为 $\frac{32768}{59049}$ ，为一弦七徽五分五，与七徽六分按音的相对音高相差也是只有一个“小微音差”，所以可以归入七徽六分。

### B. 相距“古代音差”而不能简单归并

三弦散声所应律吕为第十一次相生而出的仲吕律，相对波长为 $\frac{131072}{177147}$ ，为一弦九徽九分，与十徽按音的相对音高相差一个“古代音差”，这个音位不能简单归并于反生一次的十徽。由于当时还没发明出徽分记谱，所以会形成这样的表述：仲吕为“十徽微上”。

以下列表比较 A、B 两种情况：

表 60. 两种律制规范在徽间徽位上的比较

宫弦	律位	相对波长	相对音高	同律位 两音之差	第一弦 绝对弦长	散声、徽位 和徽分
第一弦 散声为宫	黄钟	1	0		4.5 尺	散声
第二弦 散声为宫	夹钟	$\frac{5}{6}$	1.5782	0.01 全音	3.75 尺	一弦十二徽
		$\frac{16384}{19683}$	1.588		3.74577 尺	一弦十二徽 上不足一分
第三弦 散声为宫	仲吕	$\frac{3}{4}$	2.49	0.12 全音	3.375 尺	一弦十徽
		$\frac{131072}{177147}$	2.6075		3.32957 尺	一弦九徽九分
第四弦 散声为宫	夷则	$\frac{5}{8}$	4.0684	0.01 全音	2.816 尺	一弦八徽四分
		$\frac{4096}{6561}$	4.0782		2.809 尺	一弦八徽 三分六
第五弦 散声为宫	无射	$\frac{5}{9}$	5.088	0.01 全音	2.5 尺	一弦七徽六分
		$\frac{32768}{59049}$	5.098		2.497 尺	一弦七徽 五分五

表中同律位的极小差异清楚表明，在一定的范围内，三分损益律与纯律可以得到协调统一。

以上这段文字经过这样的整理，也显示出一个矛盾：

这段原文规定了只有第二弦散声与一弦正十二徽相应，第四、五弦则与一弦的某徽间音位相应，而第三弦与“第一弦十徽微上”相应，这种表达则令人费解。尽管我们可以认为是在发明徽分记谱之前的含混描述，但比较起其他精确到寸、分、厘的数据，蒋克谦完全有能力计算出这个“微上”，并做出精确表达，



为什么却独独在这里含混了起来？何况，在早于《琴书大全》的文献《太音大全集》、《西麓堂琴统》中都已运用十徽按音相谐的调弦法，说明琴律实践中运用三倍反生的十徽是非常普遍的。蒋克谦在此处的突然模糊反而显得异常，这个问题留待后文进一步讨论。

## 2. 各宫弦五声的音律规定

《琴书大全·卷第二·声律上·十二律五弦还宫要诀·二十五》：

### 次定各宫弦五声

凡即定应为某律宫弦者自岳至龈散声为宫，就本宫弦按十三徽外六分七厘为商；按十一徽上约四分五厘为角；按正九徽为徵；按八徽上约三分五厘为羽。

这段话转写成如下形式：

某律宫弦者

宫音，散声，弦长为 4.5 尺，相对波长为 1；

商音，按十三徽外六分七厘（十三徽相对波长为  $\frac{7}{8}$ ），

绝对弦长 = 十三徽绝对弦长  $(4.5 \text{ 尺} \times \frac{7}{8}) + 0.067 \text{ 尺}$

$= 3.9375 \text{ 尺} + 0.067 \text{ 尺} = 4.0045 \text{ 尺}$

相对弦长  $= 4.0045 \div 4.5 = 0.8898889$

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

a.  $\frac{8}{9} = 0.888889$ ；b.  $\frac{9}{10} = 0.9$

与蒋克谦所传数据相比，取前者  $\frac{8}{9}$ 。十三徽的相对弦长为

0.875，徽分的推算过程为：

$(4.0045 \div 4.5 - 0.875) \times 8 = 0.119$ ，写成徽分，即十三徽下一分，即前文所论的符合三分损益律的下暗徽；

角音，按十一徽上四分五厘，

$$\begin{aligned}\text{绝对弦长} &= \text{十一徽绝对弦长} (4.5 \text{ 尺} \times \frac{4}{5}) - 0.045 \text{ 尺} \\ &= 3.6 \text{ 尺} - 0.045 \text{ 尺} = 3.555 \text{ 尺}\end{aligned}$$

$$\text{相对弦长} = 3.555 \div 4.5 = 0.79$$

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

$$\text{a. } \frac{4}{5} = 0.8; \text{ b. } \frac{64}{81} = 0.7901234$$

与蒋克谦所传数据相比，取后者  $\frac{64}{81}$ 。十徽的相对弦长为

0.75，徽分的推算过程为：

$$(3.555 \div 4.5 - 0.75) \times 20 = 0.8, \text{ 写成徽分，即十徽八分；}$$

徵音，按正九徽，

$$\text{绝对弦长} = 4.5 \text{ 尺} \times \frac{2}{3} = 3.0 \text{ 尺}$$

$$\text{相对弦长} = 3.0 \div 4.5 = 0.666667;$$

羽音，按八徽上三分五厘，

$$\begin{aligned}\text{绝对弦长} &= \text{八徽绝对弦长} (4.5 \text{ 尺} \times \frac{3}{5}) - 0.035 \text{ 尺} \\ &= 2.7 \text{ 尺} - 0.035 \text{ 尺} = 2.665 \text{ 尺}\end{aligned}$$

$$\text{相对弦长} = 2.665 \div 4.5 = 0.592222$$

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

$$\text{a. } \frac{3}{5} = 0.6; \text{ b. } \frac{16}{27} = 0.5925925$$

与蒋克谦所传数据相比,取后者 $\frac{16}{27}$ 。七徽的相对弦长为

0.5,徽分的推算过程为:

$(2.665 \div 4.5 - 0.5) \times 10 = 0.9222$ ,写成徽分,即七徽九分。

以上结果用五线谱附加校正值和表格表示:

谱例9. 某律宫弦五声

校正值:                      +.02    +.04    +.01    +.03

相对弦长:    1         $\frac{8}{9}$          $\frac{64}{81}$          $\frac{2}{3}$          $\frac{16}{27}$

表 61. 一弦黄钟宫弦五声

阶名	宫弦上的 按音位置	绝对弦长 (尺)	相对弦长	相对波长	散声、徽位 和徽分
宫	散声	4.5	1	1	散声
商	十三徽外 六分七厘	4.0045	0.889889	$\frac{8}{9}$	十三徽一分
角	十一徽上 四分五厘	3.555	0.79	$\frac{64}{81}$	十徽八分
徵	正九徽	3.0	0.666667	$\frac{2}{3}$	九徽
羽	八徽上 三分五厘	2.665	0.59259	$\frac{16}{27}$	七徽九分

此宫弦上的五声实为第一弦黄钟宫五声音阶。

用八度协和而不是用同音协和的办法,将其他四弦套用过来:

## 谱例10. 第二弦夹钟宫五声

校正值:      +.08    +.10    +.12    +.09    +.11

相对波长:       $\frac{5}{6}$        $\frac{20}{27}$        $\frac{160}{243}$        $\frac{5}{9}$        $\frac{40}{81}$

表 62. 二弦夹钟宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{6} \times \frac{8}{9} = \frac{20}{27}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{6} \times \frac{64}{81} = \frac{160}{243}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{6} \times \frac{16}{27} = \frac{40}{81}$	七徽九分

## 谱例11. 第三弦仲吕宫五声

校正值:      -.01    +.01    +.03      +.02

相对波长:       $\frac{3}{4}$        $\frac{2}{3}$        $\frac{16}{27}$        $\frac{1}{2}$        $\frac{4}{9}$

表 63. 三弦仲吕宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{3}{4} \times \frac{64}{81} = \frac{16}{27}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	九徽

羽	八徽上三分五厘	$\frac{3}{4} \times \frac{16}{27} = \frac{4}{9}$	七徽九分
---	---------	--	------

## 谱例12. 第四弦夷则宫五声

校正值: +.07 +.09 +.11 +.08 +.10

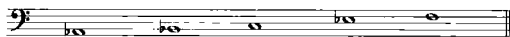
相对波长:  $\frac{5}{8}$   $\frac{5}{9}$   $\frac{40}{81}$   $\frac{5}{12}$   $\frac{10}{27}$ 

表 64. 四弦夷则宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{8} \times 1 = \frac{5}{8}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{8} \times \frac{8}{9} = \frac{5}{9}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{8} \times \frac{64}{81} = \frac{40}{81}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{8} \times \frac{16}{27} = \frac{10}{27}$	七徽九分

## 谱例13. 第五弦无射宫五声

校正值: +.09 +.11 +.13 +.10 +.12

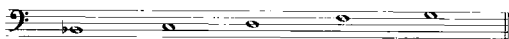
相对波长:  $\frac{5}{9}$   $\frac{40}{81}$   $\frac{320}{729}$   $\frac{10}{27}$   $\frac{80}{243}$ 

表 65. 五弦无射宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{9} \times 1 = \frac{5}{9}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{9} \times \frac{64}{81} = \frac{320}{729}$	十徽八分

徵	正九徽	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{27}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{9} \times \frac{16}{27} = \frac{80}{243}$	七徽九分

以上二、三、四、五弦还有第二种三分损益律可能性，具体数据可以根据表 60 计算得出。

### 三、《琴书大全》中琴五调的律学表达

有了五弦各为宫的散声相互关系和在每弦上各自得到五声的相互关系，对《琴书大全》中逐一开具的十二律按声与散声应律为五声的文字描述就不难理解了。以下用同样的方式把琴五调各调关系全部用律学表达法解读。

《琴书大全·卷第二·声律上》记载了“琴五调”的定弦方法，以下根据原文逐一分析。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十五》：

黄钟律以第一弦散声为宫，按第一弦十三徽外六分七厘与第二弦散声相应为商，律应太簇；按第一弦十一徽上约四分五厘与第三弦散声相应为角，律应姑洗；按第一弦正九徽与第四弦散声相应为徵，律应林钟；按第一弦八徽上约三分五厘与第五弦散声相应为羽，律应南吕。第六弦为少宫律应黄清；第七弦为少商，律应太清。

这段话是关于“慢角调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

谱例14. 黄钟律以第一弦散声为宫音

音阶： 宫 商 角 徵 羽 少宫 少商

校正值：           +.02  +.04  +.01  +.03           +.02

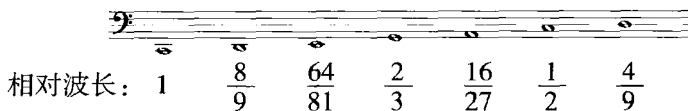


表 66.

弦序	律名	阶名	宫弦上的 按音位置	宫弦绝对 弦长	相对波长	宫弦散声、 徽位和徽分
一弦	黄钟	宫	散声	4.5 尺	1	散声
二弦	太簇	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{8}{9}$	十三徽一分
三弦	姑洗	角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{64}{81}$	十徽八分
四弦	林钟	徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{2}{3}$	九徽
五弦	南吕	羽	八徽上三分五厘	2.665 尺	$\frac{16}{27}$	七徽九分
六弦	黄清	少宫	正七徽	2.25 尺	$\frac{1}{2}$	七徽
七弦	太清	少商	(十三徽外六分七厘)	2.0 尺	$\frac{8}{9} \times \frac{1}{2}$ $= \frac{4}{9}$	十三徽一分

“右（又）黄钟、大吕、太簇三律皆以第一弦为宫，其调弦法亦同……”大吕、太簇二律以第一弦为宫，只须分别提高一律、两律，大吕均、太簇均整体移位小二度、大二度。此处不再一一列出。这个定弦方法虽然与《太音大全集》中记载的方法不同，但调出来的结果是相同的。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十六》：

夹钟律以第二弦散声为宫，按第二弦十三徽外六分七厘与第三弦散声相应为商，律应仲吕；按第二弦十一徽上约四分五厘与第四弦散声相应为角，律应林钟；按第二弦正九徽与第五弦散声相应为徵，律应无射；按第二弦八徽上约三分五厘与第一弦散声相应为羽，律应黄钟。第六弦为少羽，律应黄清；第七弦为少宫，律应夹清。

这段话是关于“清商调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

谱例15. 夹钟律以第二弦散声为宫音（从“先定五弦各为宫”一段知二弦夹钟为 $\frac{5}{6}$ ）

音阶：羽 宫 商 角 徵 少羽 少宫  
校正值：+.11 +.08 +.10 +.12 +.09 +.11 +.08


  
相对波长： $\frac{80}{81}$   $\frac{5}{6}$   $\frac{20}{27}$   $\frac{160}{243}$   $\frac{5}{9}$   $\frac{40}{81}$   $\frac{5}{12}$

表 67.

弦序	律名	阶名	宫弦上的 按音位置	宫弦绝对 弦长	相对波长	宫弦散声、 徽位和徽分
一弦	黄钟	羽	(八徽上三分五厘)		$\frac{5}{6} \times \frac{16}{27} \times 2 = \frac{80}{81}$	
二弦	夹钟	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{6}$	散声
三弦	仲吕	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{6} \times \frac{8}{9} = \frac{20}{27}$	十三徽一分



四弦	林钟	角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{6} \times \frac{64}{81} = \frac{160}{243}$	十徽八分
五弦	无射	徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$	九徽
六弦	黄清	少羽	八徽上三分五厘	2.665 尺	$\frac{5}{6} \times \frac{16}{27} = \frac{40}{81}$	七徽九分
七弦	夹清	少宫	正七徽	2.25 尺	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$	七徽

“右（又）夹钟、姑洗二律皆以第二弦为宫，其调弦法亦同……”夹钟、姑洗二律共弦，所以姑洗均各音移高一个小二度。

这个定弦方法以三分损益法为原则，其结果必然与前述以十一徽纯律音程相应的调节方法得出的结果不同，虽说是紧五弦，但一弦、六弦也都要紧（调高）一个普通音差。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十七》：

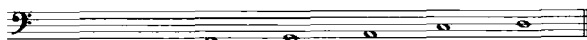
仲吕律以第三弦散声为宫，按第三弦十三徽外六分七厘，与第四弦散声相应为商，律应林钟；按第三弦十一徽上约四分五厘与第五弦散声相应为角，律应南吕；按第三弦正九徽与第一弦散声相应为徵，律应黄钟；按第三弦八徽上约三分五厘与第二弦散声相应为羽，律应太簇。第六弦为少徵，律应黄清；第七弦为少羽，律应太清。

这段话是关于“正调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

谱例16. 仲吕律以第三弦散声为宫音（从“先定五弦各为宫”一段知三弦仲吕为 $\frac{3}{4}$ ）

音阶： 徵 羽 宫 商 角 少徵 少羽

校正值： +0.2 -0.1 +0.1 +0.3 +0.2



相对波长： 1       $\frac{8}{9}$        $\frac{3}{4}$        $\frac{2}{3}$        $\frac{16}{27}$        $\frac{1}{2}$        $\frac{4}{9}$

表 68.

弦序	律名	阶名	宫弦上的 按音位置	宫弦绝对 弦长	相对波长	宫弦散声、 徽位和徽分
一弦	黄钟	徵	（正九徽）		$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 2 = 1$	
二弦	太簇	羽	（八徽上三分五厘）		$\frac{3}{4} \times \frac{16}{27} \times 2 = \frac{8}{9}$	
三弦	仲吕	宫	散声	4.5 尺	$\frac{3}{4}$	散声
四弦	林钟	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$	十三徽一分
五弦	南吕	角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{3}{4} \times \frac{64}{81} = \frac{16}{27}$	十徽八分
六弦	黄清	少徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	九徽
七弦	太清	少羽	八徽上三分五厘	2.665 尺	$\frac{3}{4} \times \frac{16}{27} = \frac{4}{9}$	七徽九分

“右（又）仲吕、蕤宾、林钟三律皆以第三弦为宫，其调弦法亦同……”蕤宾、林钟二律与仲吕律共弦，蕤宾均、林钟均各音分别移高小二度、大二度。这个正调定弦与前文中《五知斋琴谱》介绍的方法不同，但结果相同。

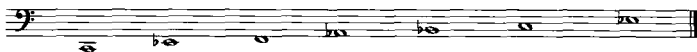
《琴书大全·卷第二·声律上·二十八》：

夷则律以第四弦散声为宫，按第四弦十三徽外六分七厘，与第五弦散声相应为商，律应无射；按第四弦十一徽上约四分五厘与第一弦散声相应为角，律应黄钟；按第四弦正九徽与第二弦散声相应为徵，律应夹钟；按第四弦八徽上约三分五厘与第三弦散声相应为羽，律应仲吕。第六弦为少角律应黄清；第七弦为少徵，律应夹清。

这段话是关于紧二、四、五、七弦（相当于“慢宫调”）散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

谱例17. 夷则律以第四弦散声为宫音（根据上文知四弦夷则为 $\frac{5}{8}$ ）

音阶：	角	徵	羽	宫	商	少角	少徵
校正值：	+11	+08	+10	+07	+09	+11	+08



相对波长：	$\frac{80}{81}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{5}{12}$
-------	-----------------	---------------	-----------------	---------------	---------------	-----------------	----------------

表 69.

弦序	律名	阶名	宫弦上的 按音位置	宫弦绝对 弦长	相对波长	宫弦散声、 徽位和徽分
一弦	黄钟	角	(十一徽上 四分五厘)		$\frac{5}{8} \times \frac{64}{81} \times 2 = \frac{80}{81}$	
二弦	夹钟	徵	(正九徽)		$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{5}{6}$	
三弦	仲吕	羽	(八徽上三分五厘)		$\frac{5}{8} \times \frac{16}{27} \times 2 = \frac{20}{27}$	

四弦	夷则	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{8}$	散声
五弦	无射	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{8} \times \frac{8}{9} = \frac{5}{9}$	十三徽一分
六弦	黄清	少角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{8} \times \frac{64}{81} = \frac{40}{81}$	十徽八分
七弦	夹清	少徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$	九徽

“右（又）夷则、南吕二律皆以第四弦为宫，其调弦法亦同……”南吕与夷则二律共弦，南吕均各音移高小二度。这个定弦的步骤实际上是第三次“清角为宫”，各弦之间的音程关系与后来的“慢宫调”相同。由于前文对五弦各自为宫时已经做出律学规定，此调各弦相生关系以三分损益法为原则，所以当四弦夷则为宫时，一弦和六弦就必须调高一个普通音差。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十九》：

无射律以第五弦散声为宫，按第五弦十三徽外六分七厘，与第一弦散声相应为商，律应黄钟；按第五弦十一徽上约四分五厘与第二弦散声相应为角，律应太簇；按第五弦正九徽与第三弦散声相应为徵，律应仲吕；按第五弦八徽上约三分五厘与第四弦散声相应为羽，律应林钟。第六弦为少商律应黄清；第七弦为少角，律应太清。

这段话是相当于“紧羽调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

谱例18. 无射律以第五弦散声为宫音（根据上文知五弦无射为 $\frac{5}{9}$ ）

音阶： 商 角 徵 羽 宫 少商 少角  
校正值： +.11 +.13 +.10 +.12 +.09 +.11 +.13



相对波长： $\frac{80}{81}$   $\frac{640}{729}$   $\frac{20}{27}$   $\frac{160}{243}$   $\frac{5}{9}$   $\frac{40}{81}$   $\frac{320}{729}$

表 70.

弦序	律名	阶名	宫弦上的 按音位置	宫弦绝对 弦长	相对波长	宫弦散声、 徽位和徽分
一弦	黄钟	商	(十三徽外 六分七厘)		$\frac{5}{9} \times \frac{8}{9} \times 2 = \frac{80}{81}$	
二弦	太簇	角	(十一徽上 四分五厘)		$\frac{5}{9} \times \frac{64}{81} \times 2 = \frac{640}{729}$	
三弦	仲吕	徵	(正九徽)		$\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{20}{27}$	
四弦	林钟	羽	(八徽上三分五厘)		$\frac{5}{9} \times \frac{16}{27} \times 2 = \frac{160}{243}$	
五弦	无射	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{9}$	散声
六弦	黄清	少商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	十三徽一分
七弦	太清	少角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{9} \times \frac{64}{81} = \frac{320}{729}$	十徽八分

“右（又）无射、应钟二律皆以第五弦为宫，其调弦法亦同……”应钟与无射二律共弦，所以无射均各音移高小二度。由于运用三分损益法，以五弦无射为宫时，不仅要紧二、四、五、七弦，一弦和六弦也要紧一个普通音差。

《琴书大全》中的琴五调定弦，与前边“先定五弦各为宫”

的规定产生内在数理矛盾，使各弦的调节结果显得较为复杂；以一次“变宫为角”和三次“清角为宫”为旋宫顺序，显得不够平衡和过于繁琐。而其他文献中则记载为“变宫为角”、“清角为宫”各两次，紧二、四、五、七弦的调弦方式被慢一、三、六弦的慢宫调所代替。

#### 四、《琴书大全》等文献中体现出的琴律实践

通过对《琴书大全·声律上》中记载的数据进行数学分析，我们可以了解古琴记谱法在发明徽分之前，对徽间音位运用的情况。通过这样的整理，蒋氏系统中的内在矛盾也就凸现出来了。在上文的归纳中，我们看到了一个实践与理论冲突的实例，即三弦仲吕律与一弦黄钟律“十徽微上”相应。在以三分损益法及其律制一统天下的漫长乐律学史过程中，仲吕只能是第十一次生律而得到的相对波长为 $\frac{131072}{177147}=2^{17} \cdot 3^{-11}$ 、相对音高为 2.61 全音（522 音分）的那一律，它的绝对弦长为 3.3296 尺，按音为十徽上四分五厘，换算成徽分即为九徽九分。以蒋克谦对其他计算精确到厘的数据（小数点后第三位）来看，他完全可以算出三分损益律的仲吕律并表达为“十徽上四分五厘”。那么，为什么他在这里要含糊地表述为“十徽微上”呢？其实，答案并不难找。这是由于三分损益法不认反生，甚至斥之为“乖相生之道，失君臣之义”，所以虽然反向五度相生，即三倍相生，可以得到纯正四度的简单比例关系 $\frac{3}{4}$ ，相对音高为 2.49 全音（498 音分），但琴人却从不说第十徽为“仲吕律”，而是在实际演奏中自然地运用

这个音。<sup>①</sup> 这可能正是民间乐人常用的巧妙对策，把更合乎自然规律的实践巧妙地隐藏在权威理论的背后。蒋克谦尽管十分忠于三分损益法的规则，但也不得不在音乐实践的前提下采取一个中庸含糊的态度。这个事实也证实了历史上意识形态对音乐实践的影响与制约。

虽然在众多的音乐文献、特别是在历代乐、律志中没有明确、详尽地记载琴律的内容，但从以上提到的诸种文献中所记载的片断，我们可以整合为一个完整的琴律体制，如同表 42 琴律表所作的工作那样，根据各种相生关系，可以呈逻辑关系排列出 28 个表格。在这些表述中，可以按图索骥地查出每个琴调所规定的各弦各徽的相对波长。（见附录一的表格）同样，也可以排列出徽分运用的逻辑表格。有了这些系统性数据，就可以把握音程的本质以及在乐调中所具有的功能性或色彩性，并可以充分认定，在琴的实践上，早已在默默地运用反生法一次生律得到相对波长为  $\frac{3}{4}$ （2.49 全音）的第十徽，将其视为仲吕律。

从《碣石调·幽兰》、《明徽暗徽法》到朱熹的《琴律说》，都提到了运用一些纯律的徽位或徽间音位，而蒋克谦的《琴书大全》则极为可贵地记录下了琴律的系统性和精确的数据。在“先定五弦各为宫”和“次定各宫弦五声”两段文字中显示出的矛盾，也如实地说明了当时的琴学实践：当“每弦各为宫”调弦时，以弦长等差划分为物理基础，追求两弦音程的和谐性，以保证古琴演奏中极重要的和音效果，所以黄钟律与夹钟律之间为纯

① 关于这种音乐实践中的表达避讳，丁承运先生曾经特别提及。

律小三度；而在一弦上求五声时，则追求音程的旋律性，所以黄钟律与夹钟律之间的音程系数为 $\frac{80}{81} \div \frac{5}{6} = \frac{32}{27}$ ，即五度律小三度。这种音律关系的选择取舍与音乐内在的调律运动规律直接相关，始终是与乐学结构紧密结合在一起的。《琴书大全》在琴五调定弦过程中也反映出了机械运用三分损益法，面对琴律实践与三分损益律的冲突却找不到解决之道。

从《琴书大全》到《五知斋琴谱》、《琴学入门》，我们也可以看到调弦方法在音律观念上的不同：蒋克谦所记录的是刻意寻找符合三分损益律的音位与散声相谐定弦，这就势必要运用徽间音位；而后两个文献中所反映的是以重视听觉，循“自然之节”的徽位按音与散声相谐的规律来调节各弦。





## 第六章

# 中国对十二平均律的研究

第一节 朱载堉——最早创立十二平均律

第二节 西蒙·斯台文对十二平均律的研究

第三节 斯台文与朱载堉的比较

……



## 第一节

# 朱载堉——最早创立十二平均律

三分损益法形成的十二律，最大的问题是旋相不能还宫。一部中国乐律学史的重要内容就是由寻找解决这个问题而提出的各种方法、主张构成的。最接近十二平均律的何承天新律和王朴新律都有意无意地取得了近似结果。但他们都是用一种调节的办法来找出这样一个近似的结果，却不能建立起一套有严密逻辑的平均律系统。

要求出十二平均律，必须以建立等比数列概念和掌握开方技术为前提。何承天新律时代，由于没有开方术的数学支持，虽然十二平均律的理想已完全成熟，但所用的方法理论上是错误的。他把经过三分损益法第 12 次生律得出的短于黄钟的那律的振动体长度除以 12，分别加在每一次相生上，虽然最后效果上很接近十二平均律，但由于以振动体长度的均匀差数添加到各律，不合“音越高，差数越小的道理”，故而“何承天十二长度均差新律”的理论价值并不高，只是标志着早期对十二平均律的追求与探索，具有历史意义。王朴也曾逼近了这样的结果，但也只是运用调整生律链环的局部，没有提出一个普遍公式。直到 16 世纪

后半叶（1584 年以前），明代朱载堉（1536～1611 年）在《律历融通》中提出了十二平均律的概念“新法密率”和基本方法。但在《律历融通》（1581 年）中所介绍的方法仍然是以三分损益法为基本思路，采用缩小分母，求出五度和四度的比数，然后按照上、下相生顺序乘除 12 次，就可以“返本还原”。他非常清楚地言明，这是“新法，与古法不同”。直到 1596 年的《律吕精义》才详细公布了“密率”的方法与数据，他所求出的一系列等比级数使十二平均律得到了数学公式化的表达。十二平均律与其他各种在自然律基础上演绎出来的律制的不同就在于，其他律制是以一个或两个基本的生律“细胞”相生而出，十二平均律则是人为地预先将八度均分而设定出一个半音的比率然后依次连乘，所以此前何承天、王朴用相生方法不可能得到真正的十二平均律。而刘焯不知首先要在八度内平均划分然后依次叠加的道理，所以最后的结果背道而驰。

### 朱载堉的计算方法

【律吕精义】度本起于黄钟之长，则黄钟之长即度法一尺。命平方一尺为黄钟之率。东西十寸为句，自乘得百寸为句幂；南北十寸为股，自乘得百寸为股幂；相并共得二百寸为弦幂。乃置弦幂为实，开平方法除之，得弦一尺四寸一分四厘二毫一丝三忽五微六纤二三七三零九五零四八八零一六八九为方之斜，即圆之径，亦即蕤宾倍律之率。以句十寸乘之，得平方积一百四十一寸四十二分一十三厘五十六毫二十三丝七十三忽零九五零

四八八零一六八九为实，开平方法除之，得一尺一寸八分九厘二毫零七忽一微一纤五零零二七二一零六六七一七五，即南吕倍律之率。仍以句十寸乘之，又以股十寸乘之，得立方积一千一百八十九寸二百零七分一百一十五厘零零二毫七百二十一丝零六十六忽七一七五为实，开立方方法除之，得一尺零五分九厘四毫六丝三忽零九纤四三五九二九五二六四五六一八二五，即应钟倍律之率。盖十二律黄钟为始，应钟为终，终而复始，循环无端，此自然真理，犹贞后元生，坤尽复来也。是故各律皆以黄钟正数十寸乘之为实，皆以应钟倍数十寸零五分九厘四毫六丝三忽零九纤四三五九二九五二六四五六一八二五为法除之，即得其次律也。安有往而不返之理哉！……<sup>①</sup>

接下来，朱载堉列出了黄钟倍律至黄钟正律共十三律位的数据，他对所有的计算都运算到二十五位数字，今日普通电子计算器也只算到十位数，但他在400多年前就已经达到如此精确的程度。这段话介绍了他以勾股定理为计算方法，从第一句，他已经给出了黄钟倍律和黄钟正律弦长比为2:1。具体过程为：“黄钟之长”一尺，设一尺的平方为黄钟正律（100寸<sup>2</sup>）；勾幂（100寸<sup>2</sup>）+股幂（100寸<sup>2</sup>）=200寸<sup>2</sup>，是为黄钟倍律。最后一句话“是故各律皆以黄钟正数……”表达了他以应钟倍律与黄钟正律之间的距离作为十二律之间各律的等程标准。操作方法是以求比

<sup>①</sup> 《律吕精义·内篇·卷一·不用三分损益第三》，冯文慈点校本第9—10页，人民音乐出版社，1998年7月北京第一版。

例中项逐步得出：将黄钟倍律开平方得蕤宾倍律……

朱载堉的计算法在今日看来，其思维逻辑框架为：

表 71.

c <sup>1</sup>	*c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	*d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	*f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	*g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	*a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
黄钟倍律 <sup>①</sup>	大吕倍律	太簇倍律	夹钟倍律	姑洗倍律	仲吕倍律	蕤宾倍律	林钟倍律	夷则倍律	南吕倍律	无射倍律	应钟倍律	黄钟正律
x <sup>12</sup> : x <sup>11</sup> : x <sup>10</sup> : x <sup>9</sup> : x <sup>8</sup> : x <sup>7</sup> : x <sup>6</sup> : x <sup>5</sup> : x <sup>4</sup> : x <sup>3</sup> : x <sup>2</sup> : x : 1												

因为（黄钟倍律长度）：（黄钟正律长度）=2：1，所以  $x^{12}=2$ ； $x=\sqrt[12]{2}$ ，即为应钟倍律的相对长度，朱载堉把它认作“诸率之母”，视作计算焦点。朱载堉的计算分三个步骤：

第一步，计算出六个半音的蕤宾倍律的相对长度（\*f），即先把纯八度开平方：

$$(\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt{2} = 1.414213562373095048801689 \text{ (尺)}$$

第二步，计算出三个半音的南吕（\*d）相对长度，即从第一步所得再开平方：

$$(\sqrt[12]{2})^3 = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} = 1.1892071\cdots \text{ (尺)}$$

第三步，计算半音应钟倍律（\*c）相对长度，根据第二步所得为  $x^3$ ，需要开三次方（古代称为“立方”），计算技巧更高深，朱载堉在那个时代算出这个结果，在数学方面也是走在最前沿：

$$\sqrt[3]{x^3} = x = 1.05946309435\cdots \text{ (尺)}$$

现在，我们可以用表格表示朱载堉计算所得的十二项等比数列之值：

① 定黄钟音高为 c。

表 72. (近似值一栏四舍五入保留 15 位小数)

音程系数 所对应的 音程	相对长度 所对应的 律吕名称	代数 表达式	简化后 的根式	近似值	相对音高
基音	黄钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^{12}$		2	0
$\frac{1}{2}$ 全音	大吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^{11}$		1.887748625363387	0.5
1 全音	太簇倍律	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	$(\sqrt[6]{2})^5$	1.781797436280679	1
$1\frac{1}{2}$ 全音	夹钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[4]{2})^3$	1.681792830507429	1.5
2 全音	姑洗倍律	$(\sqrt[12]{2})^8$	$(\sqrt[3]{2})^2$	1.58740105196819	2
$2\frac{1}{2}$ 全音	仲吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^7$		1.49830707687668	2.5
3 全音	蕤宾倍律	$(\sqrt[12]{2})^6$	$\sqrt{2}$	1.414213562373095	3
$3\frac{1}{2}$ 全音	林钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^5$		1.334839854170034	3.5
4 全音	夷则倍律	$(\sqrt[12]{2})^4$	$\sqrt[3]{2}$	1.259921049894873	4
$4\frac{1}{2}$ 全音	南吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^3$	$\sqrt[4]{2}$	1.189207115002721	4.5
5 全音	无射倍律	$(\sqrt[12]{2})^2$	$\sqrt[5]{2}$	1.122462048309373	5
$5\frac{1}{2}$ 全音	应钟倍律	$\sqrt[12]{2}$		1.059463094359295	5.5
6 全音	黄钟正律	1		1	6

朱载堉能够完成十二平均律的计算, 不仅表明他在律学、数学方面达到的世界性高度, 同时也说明他在思想认识方面敢于冲破禁忌。中国两千年来的律学史一直围绕黄钟律数必为九寸, 不敢越雷池半步。他设黄钟正律为一尺, 突破了思想难关, 使新法



密率的计算数值变得简洁清晰，终于认识到“黄钟九寸”只是“算家立率”而已，将数理理论与实验对象统一起来，通过对一根弦长作一系列的开方计算，求比例中项，得到长度越来越短、音越来越高这种合乎自然的结果。

虽然朱载堉最早发明了十二平均律，不仅是对中国律学史的一大贡献，也是对世界律学史的一大贡献，但他的重大发明并没得到统治阶级的重视，也没得到实际运用。不过，在民间，琵琶类乐器在定音方式上可能早已接触到了近似十二平均律的方案。

## 第二节

### 西蒙·斯台文对十二平均律的研究

据可靠记载，从16世纪起，在欧洲，为了解决普通音差所造成的繁杂局面和中庸全音律的不足，不断有人从事十二平均律的研究。荷兰数学家兼工程师西蒙·斯台文（Simon Stevin，1548～1620年）于1596年也提出了十二平均律<sup>①</sup>。长期以来，五度循环生律方法的重要性，使人们总是局限在这样一个范围里思考问题，如同何承天、王朴等人的尝试；在欧洲也同样有着长时间的以五度循环之法求十二平均律的经历。斯台文虽然走出了

---

① 斯台文的《关于歌唱艺术的理论》（*Vande Spiegheling der Singconst* “On the theory of the art of singing”）根据Adriaan Fokker的英译点校本，收于Adriaan Fokker编辑的*Principal Works of Simon Stevin* vol. 5 阿姆斯特丹1955～1966年，第413～464页。

五度循环的模式，但仍然是以寻找五度为突破口。由于他与朱载堉是同时代的人，从创立与发表十二平均律的时间来说，斯台文略后几年。他们的方法与结果是一个有可比性的研究实例。

### 斯台文的计算方法

今天，我们可以了解到斯台文的思路是这样的：首先确认纯八度为  $1 : \frac{1}{2}$ ，在这个纯八度之间找出 13 项连比式的 11 个中间项，每两个项中间可以同时满足插入算术中项、和谐中项和几何中项的要求<sup>①</sup>，即对  $\frac{1}{2}$  进行 12 次开方，得到的半音就是平均律半音。他的计算过程是：

第一步：计算十二平均律五度（ $3\frac{1}{2}$  全音）的比值，设其为  $\sqrt[12]{\frac{1}{128}}$ <sup>②</sup>，将基音为 1 的数扩大到 10000， $3\frac{1}{2}$  全音的数值也要扩大 10000 倍，故  $(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7 \times 10000 = 6674$ 。斯台文只算出了这四位数字，我们可以提供出更精确的数为 6674.19927085……

---

① 1. 算术中项的定义是：用一组数的个数作除数去除这一组数的和所得出的平均值；2. 和谐中项：算术中项的倒数；3. 等比中项：作为  $n$  个因数乘积的数的  $n$  次方根。这三个条件的公式是这样： $a$  为算术中项， $h$  为和谐中项， $g$  为等比中项，两个数用  $p$  和  $q$  表示。 $p - a = a - q$ ； $\frac{1}{p} - \frac{1}{h} = \frac{1}{h} - \frac{1}{q}$ ； $p : g = g : q$ 。将表 73 中任意相邻两项都可以带入这三个公式中。同样对于表 72 中朱载堉的数据也可以带入这三个公式检验。

② 斯台文书写的开方格式为“ $\sqrt{(n)a}$ ”，是他那个时代的样式，433 页。这可能会引起些误会，所以此处写为通常的开方式， $\sqrt{(n)a} = \sqrt[n]{a}$ 。

第二步：6 全音减去  $3\frac{1}{2}$  全音，得到平均律四度、 $2\frac{1}{2}$  全音，

即  $(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5 = 7491$ ;

第三步：平均律五度减去平均律四度，得平均律全音，即

$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^2 = 8909$ ;

第四步：全音的平方，即为平均律大三度， $(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^4 = 7937$ <sup>①</sup>;

第五步：平均律四度减去大三度，得平均律半音，即  $\sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 9438$ 。

将他的思路及数据整理可以列出下表：

---

① 经笔者验算得 7937，比斯台文算出的 7936 更精确，对数后正好为 2 全音。

表 73.

音名	音程值	斯台文 设定	同底 幂积	简化 形式	斯台文 长度	音程	相对音高 (全音)	校差值
c <sup>1</sup>	基音	1			10000	一度		
<sup>#</sup> c <sup>1</sup>	$\frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$		9438	小二度	0.5007	+ .0007
d <sup>1</sup>	全音	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^2$	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$	8909	大二度	0.9999	- .0001
<sup>#</sup> d <sup>1</sup>	$1 \frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^3$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	8409 <sup>①</sup>	小三度	1.499	- .001
e <sup>1</sup>	2 全音	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^4$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	7936	大三度	2.001	+ .001
f <sup>1</sup>	$2 \frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{32}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5$		7491	四度	2.500	
<sup>#</sup> f <sup>1</sup>	3 全音	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^6$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	7071	不良大四 <sup>②</sup>	3.000	
g <sup>1</sup>	$3 \frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{128}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7$		6674	五度	3.500	
<sup>#</sup> g <sup>1</sup>	4 全音	$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^8$		6298	小六度	4.002	+ .002
a <sup>1</sup>	$4 \frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^9$		5944	大六度	4.5029	+ .0029
<sup>#</sup> a <sup>1</sup>	5 全音	$\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{10}$		5611	小七度	5.0019	+ .0019
b <sup>1</sup>	$5 \frac{1}{2}$ 全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{2048}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{11}$		5296	大七度	5.502	+ .002
c <sup>2</sup>	6 全音	$\frac{1}{2}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{12}$		5000	纯八度	5.9999	- .0001

① 在斯台文的原手稿中,这个数为 8404,经英译者 Adriaan Fokker 校勘为 8409。见 *Principal Works of Simon. Stevin* vol. 5:第 447 页。

② 斯台文命名为“不良四度”(Bad fourth),而数值为 7491,即  $2 \frac{1}{2}$  全音为“好的四度”(Good fourth)。

由于斯台文的数值只算到四位数，所以只有前两步的结果和八度的中项三全音是绝对准确的平均律数值，其他则有不同程度的校正量。

### 第三节

## 斯台文与朱载堉的比较

虽然斯台文在 16 世纪的最后 10 年间完成了十二平均律的理论<sup>①</sup>，但并没有发表，甚至斯台文自己也没有认为这个重要发现有什么科学价值。他的手稿直到 1884 年才被人发现并发表，而在这之前，已经由其他人完成了这个历史使命。关于这位几乎与朱载堉同时创建十二平均律理论的斯台文，另外一个争论的焦点是：他是否受了朱载堉的启发<sup>②</sup>。从以上演算过程可以比较出以下几点：

(1) 朱载堉设黄钟倍律与黄钟正律之间为  $2:1$ ，在这两项之间寻找 11 个等比数列；斯台文在一弦器上找出中点，在  $1:\frac{1}{2}$  之间寻找 13 个连比式的 11 个中间项。

---

① 近半个多世纪以来，关于他的完成时间一直存在着争执，主要是为了确定他和朱载堉谁为先的问题，所有的推测结论都在 1585~1608 年之间。朱载堉至晚在 1581 年前就已经创建并完成了十二平均律的理论和计算。

② 李约瑟 (J. Needham) 认为斯台文可能从耶稣会教士那里获得了来自中国有关朱载堉等程律理论的信息。戴念祖先生也持此观点。详见《中国声学史》第 327 页。

(2) 朱载堉以半音 $\sqrt[12]{2}$ 数值简单连乘得各项；而斯台文的被开方数各不相同。因为他是先将被开方数乘方再开 12 次方，将 1 扩大为整数 10000，用比例关系计算。

(3) 朱载堉的突破点是找出应钟倍律与黄钟正律之间的半音。通过相继开平方求比例中项蕤宾倍律、南吕倍律，最后开立方求出应钟倍律，整个计算非常简洁。而斯台文将突破口放在先找平均律五度的方根代替原来的 3 : 2，经过复杂的五个步骤，求出平均律半音。

(4) 精密度只有 4 位数，远不如朱载堉所达到的 25 位数精确。

(5) 斯台文的手稿中有一个错，已经由英译者校勘，但整个方法并没有错，虽然不如朱载堉的方法精炼。

综上所述，可以得出结论：作为一个工程师，斯台文有很高的数学修养，自己独立完成了十二平均律的理论建设。他特别在自己的论述过程中强调，由于希腊语中没有“等比”这个词，所以希腊人是没法产生这样的思维。而荷兰语中有“等比”这个词，所以只有荷兰人才会得到寻找平均律的思路<sup>①</sup>，在八度内插入数学中间项，完成十二平均律的理论建设。当然这表明了他的夜郎自大和不健康的民族主义，同时也说明他是独自完成理论建设这个事实。但由于缺少对音乐的了解，看不到自己的成果所具有的高度价值，不仅如此，甚至在当他谈论毕达哥拉斯律时，他可以意识到“林玛半音”和“阿波托美半音”的存在，却没有任何专业化表述，而这些术语已经使用了两千年以上，由此可以看出，他本人对音乐理论的了解是非常有限的。正是这些专业知识方面的欠缺，使他与在西方创建十二平均律理论第一人的荣誉历史地失之交臂。

① *Principal Works of Simon Stevin*. vol. 5: 第 429 页。



## 第七章

# 中国近现代乐律学研究状况

第一节 20世纪上半叶的中国律学研究

第二节 20世纪下半叶的乐律学研究

……





## 第一节

# 20 世纪上半叶的中国律学研究

### 一、在律学研究中引进欧洲的声学、数学方法

中国现代律学的专门研究始于上世纪初，最早的专题论著见于1930年前后，刘复、杨荫浏、王光祈、杨荫浏等人开始发表的一些文章，介绍、引进欧洲用数学方法研究律学的成果，并用新理论来评述古代乐律学成果及研究笛、琴、琵琶等乐器音律。最具代表性的有刘复的数篇关于管弦乐器发音原理和音律计算的论文，他不仅列出西方所用的音响计量单位的频率和我国传统律数的对应关系，而且最早用现代算术公式表达朱载堉“新法密率”，最早引进埃利斯创用的音分计量法，从现代科学的角度对中国古代律学遗产进行客观评述，成为将西方声学知识与中国音乐实践相结合的先行者。刘复还于1930年主持了对北京故宫和

天坛所藏清宫古乐器的测音工作。<sup>①</sup>王光祈于1929年发表了中国第一部引进西方音乐声学的著述<sup>②</sup>，书中从物理、生理、心理三个方面探讨音响的发生、现象、性质、客观效应等问题，对国内采用现代方法研究律学有重要的启迪作用。20世纪50年代以后，杨荫浏等人开始对出土编钟进行测音并对其数据作律学分析。这种对编钟的研究，随着考古发现及研究新成果而产生，并随之向纵深发展，直到20世纪70年代末80年代初对曾侯乙编钟的全面研究，律学研究也因为有了对地下、地上乐器实物的测音数据而产生了重大成果。杨荫浏先生早期也发表了一些论文，介绍管弦乐器音律计算方法和研究律学的数理方法，时间晚于刘复，内容更贴近实际。<sup>③</sup>杨荫浏先生的律学研究不仅仅是用现代的科学方法梳理中国古代律学遗产，还制作了多种律器，绘制多

---

① 所有这些学术活动及成果详见刘复的论文《刘复教授致其弟天华先生书》（北大月刊，1924年第三号）；《琵琶及他种弦乐器之“等律”定品法》（国学周刊，1926年，第十六期）；《音律尺算法》（音乐杂志，1928年第一卷第一、二号）；《从五音六律说到三百六十律》（1927年演讲稿，载《辅仁学志》，1930年第一期）；《十二等律的发明者朱载堉》（蔡元培先生六十五岁庆祝论文集，1932年）；《吕氏春秋古乐篇昔黄节解》（文学，1934年第二卷第一号）；《天坛所藏编钟编磬音律之鉴定》（国立北京大学国学季刊，1932年，第1卷第2号）。

② 王光祈的《音学》1926年撰于德国，1929年9月由上海启智书局出版；1934年由中华书局出版；1992年由巴蜀书社辑入《王光祈文集·音乐卷》。

③ 杨荫浏早期的研究成果有《平均律算解》（1937年，燕京学报，第二十一期）；《谈笛音》（1947年，礼乐，第十六期）；《七弦琴徽分位置与其音程比值》（1948年，礼乐半月刊第一期）；《再谈笛律答卓西》（1948年，礼乐，第二、三期）；《谈琵琶音律》（1958年，民族音乐研究论文集，第三集）；《信阳出土春秋编钟的音律》（1959年，音乐研究，第一期）；《关于春秋编钟的音律问题》（1960年，音乐研究，第一期）；《管律辨讹》（1979年，文艺研究，第四期）；《三律考》（1982年，音乐研究，第一期）。

种律表,为了使律学研究能服务于音乐实践的需要,对当今笛、琴、琵琶等乐器的律制问题,提出许多有益的见解。特别是对从北宋初年(960年)到崇宁三年(1104年)期间六次的黄钟律高的变化进行推测计算,用现代声学、律学的计量表示方法,把古代音乐实践的具体事实和现代律学研究手段联系起来。最为可贵的是,在他晚年发表的《三律考》中,对中国音乐在运律方面进行学术总结,同时反思自己在早期对中国民间音乐所需要的音律因其不合十二平均律而取否定态度是不正确的,坦率地承认民间音乐中的中立音现象正是要表达特殊的情感,是平均律各律所不能替代的。

## 二、对东西方律制进行比较研究

在比较音乐学方法论的影响下,产生了一批以东西乐律比较为方向的研究成果<sup>①</sup>,其中最重要的论著当推王光祈的《东西乐制之研究》<sup>②</sup>和《东方民族之音乐》<sup>③</sup>。王光祈采用田边尚雄创用的平均律全音数的计算方法,对中国、欧亚非三洲接壤诸国、希腊、欧洲中古和近代的不同律制进行比较研究,用现代方法解释中国古代的定律法和音律算法;厘清中国古代以管定音、以弦长计算定律的事实,用国外当时的研究方法解释、介绍中国黄钟的长度和律管计算方法,开创了中国律学研究面向世界的先例。

缪天瑞的专著《律学》从1950年3月万叶书店初版、1963

---

① 早期论文有杨昭恕的《中西音律之比较》,音乐杂志,第1卷第2号,1920年4月版;萧友梅的《中西音乐的比较研究》,音乐杂志,第1卷第8号,1920年10月版;王光祈的《东西乐制之研究》,上海中华书局民国17年(1928年)版,《东方民族之音乐》,上海中华书局1929年版。

② 王光祈《王光祈音乐论著选集》上册第125~198页。

③ 王光祈《王光祈音乐论著选集》下册第1~163页。

年人民音乐出版社修订版、1983年人民音乐出版社增订版及至1996年1月人民音乐出版社第三次修订版，是律学作为一个专门学科在中国现代音乐教育中占有一席之地的标志，从每一新版本篇幅的渐次增加，足见内容的渐次充实完整，可以说现在老中青几代的律学研究者都是读着这本书走上律学的学术之路。

该书1983年版共十章，前五章侧重于律学的原理，后五章侧重于律学的应用，十章的标题是：导论，音律算法，五度相生律，纯律，十二平均律，中国律学简史，欧洲律学简史，四分之三音体系史料，亚非地区几种民族乐制，今天各种律制的应用问题。

1996年，缪天瑞先生在前一版的基础上，将20世纪80年代以来中外有关律学研究的新资料或新成就补充或加以修改，加进今人对古代律学和民族乐制研究的新成就，还增加了“律学研究的新时期”一节；第八章由原来的“四分之三音体系史料”增添改写为“阿拉伯—伊朗律学简史”，第九章因原有非洲若干乐制不够系统而删去，章名改为“亚洲地区几种民族乐制”，第十章改名为“律制的应用”。从这几版扩充的内容也可以看出：我国近一个世纪以来，律学研究方法的发展及研究范围的扩大，以及理论化的成熟进步。

律学对于当前的音乐实践和音乐学研究仍在发挥作用。20世纪80年代以来，民族音乐研究中，在测音分析的基础上，对某些地区、民族的音乐中存在的特殊音程给予律制解释，找出数理依据，从而指导民族多声音乐体制的建立与发展，探索既便于定音乐器演奏又体现民族民间音乐特有风格的新律制，成为律学研究领域里的新气象。通过考古新发现提出的新课题更构成了近一个世纪以来律学研究的主要内容。

## 第二节

# 20 世纪下半叶的乐律学研究

### 一、琴律研究

在中国古代音乐史理应反映的古代音乐史实中，琴律是长期失载的角落，黄翔鹏先生在为《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》撰写的“琴律”条目释文中说：

琴律是朱熹提出的一个律学名词。这一名词虽然晚至南宋才出现，但琴律的实践源于先秦钟律和五弦、七弦琴的艺术。春秋编钟的测音研究证明，钟律用管子五音为基础兼采纯律三度的生律法，这只在‘均钟’的性质能与琴律相关时才有可能。先秦钟律到秦以后失传，但它的实践在汉以后的七弦琴艺术中保存下来。两晋隋唐间，琴的艺术已有甚大发展，而琴的律学特点失载。北魏陈仲儒曾把琴五调与调律问题并提，但亦简略不明。宋代进入一个传统学术大整理时期，才有朱熹《琴律说》的出现。但人们对琴律的认识只是到 20 世纪 70 年代后期，才在音乐考古学的新发展中引出有关律学研究的新课题。

由于琴律的长期失载，使我们不得不采用这样一个倒叙的方式：从朱熹提出“琴律”这个名词，推及到曾钟铭文的内部逻辑其实就是琴律，继而伸展到琴律学的研究。知道了琴律是这样的

源远流长，也就可以理出乐律学发展的两条线：一条是有不间断记载、不间断发展的三分损益律，如我们前面所谈到三个里程碑，并看到了三分损益法发展到极致而带来的反弹力，即何承天、朱载堉等的由繁至简的十二平均律探索；另一条就是始终存在于实践、并隐匿于大量琴学文献中的琴律的发展。在理论与实践密切联系与直接沟通方面，琴论与琴谱的互参互证为琴律研究提供了巨大的现实可能性。陈应时发表了系列文章，对琴学文献中大量有关琴律学的资料进行解读、分析，并于20世纪80年代中期就写成了《琴律学》的书稿。虽然由于出版方面的原因，一直未能面世，不能不说是律学研究的一个损失。所幸的是，陈应时先生以系列论文的发表方式公布了他的一些研究心得，能够让我们与他分享。

## 二、对曾侯乙编钟铭文的律学内涵之研究

关于钟律就是琴律的研究，最集中而全面的是崔宪，他的研究之重大突破在于找到了钟律与琴五调之间的联系，系统论证了钟铭所体现的钟律之根本就是琴五调基本律学关系的另一种表现形式<sup>①</sup>。这样的结论在客观上使历代一些难解与不可解的乐律学史料死而复生，一些已成定论的史料有了新的解读可能。比如，经过严密核算后，对《管子》五音、《国语》五降、陈仲儒琴五“调”等有关文字，有了新的认识，认为这些都是与琴有关的文献。当然，成功吻合的计算首先基于他前期的标点、整理工作，其间的知识和技术的含量也是非常之高的。

研究成果表明，曾侯乙编钟铭文是对琴律的具体描述，而琴律就是对琴弦的声学特性以及它能生成的乐律关系的抽象化、制度化。

<sup>①</sup> 崔宪专著《曾侯乙编钟铭文校释及律学研究》。





### 三、琴律研究方法体系化

自古律学文献所用的律数都是相对长度，三分损益法就是长度的按比率增减。“五四”运动以后，刘复等人认为频率才是科学的，因而使用频率比，这种表述变成长度关系的倒数形式，这是有些自讨苦吃的。因为中国传统律学观念有其深刻的自然根据，音律的数学理论及表达与自然现象有着顺对应关系：

宏——大——低——长

细——小——高——短

这种听觉经验与音乐审美意蕴有着同构关系，这也是全人类古老文明共有的认识经验，古中国、古希腊、古印度与中古阿拉伯都有用长度关系表达音高的记载。<sup>①</sup>

杨荫浏先生也谈到管长有误差，弦长则较精确。<sup>②</sup>

黄翔鹏先生更是以精释的《均钟考》直接提示曾侯乙编钟的调律根据在于琴律。

在琴律研究中，绝对弦长并不重要，相对弦长才是重要的。而相对弦长只能适用于一根弦的范围内，古琴七条弦散声各不相同，绝对弦长都是相等时，使得同一相对弦长数值在不同弦上奏出不同的音律，因此，必须建立相对波长的概念。

由于定弦法与琴谱谱字涉及大量数学计算，形成沉重的智力负荷，使熟悉这领域的专门人才无暇通晓音乐史的全局；而音乐史研究者又难以从这领域中提炼梳理出沟通理论实践证实古今流

① 关于这一点，赵宋光在《中华律学传统的复兴与开拓》一文中有详细论说，在本书第一章也用了大量篇幅阐述这个道理。

② 《管律辨讹》，见《杨荫浏音乐论文选集》第385～395页，最早发表于1979年第4期《文艺研究》。

变的清晰线索。如何把数学计算的脑力负荷降低到最低限度,使琴学研究者从繁重的脑力劳动中解放出来,律学界应该提出一套简便易行的分析方法。赵宋光先生在琴律研究方面,一直致力于分析理论体系的建立,他的琴律分析体系的严密逻辑,从现已发表的《七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解》、《古琴徽分的顺逆推算》两文可管窥一二。在这两篇文章中,在前人研究基础上,他把各种定弦散声条件下各琴徽相对弦长所对应的音律全都用相对波长表述。

### 1. 对定弦过程用数学方程式表达

在《七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解》一文当中,赵宋光运用代数思维,设计了简洁的方程等式,可以把古代琴律文献中用繁复文字表达的定弦过程逻辑化呈现,运用方程式可以整理出琴律文献中所记载的琴五调及外调调弦法。如该文根据《五知斋琴谱》所载,先对“正调”进行解读:

原文“先用大间,散挑七弦,而左大指按四弦九徽……”转译为一系列方程:

$$[\text{七}] = [\text{四}] \times \frac{2}{3}$$

$$[\text{六}] = [\text{四}] \times \frac{3}{4}$$

$$[\text{七}] = [\text{五}] \times \frac{3}{4}$$

$$[\text{六}] = [\text{三}] \times \frac{2}{3}$$

$$[\text{七}] = [\text{二}] \times \frac{1}{2}$$

$$[\text{六}] = [\text{一}] \times \frac{1}{2}$$

这种方括号内填入汉字的代数表达有两重含义:

(1) 具有地址意义：所填数字为弦的序号数，弦的序号数用汉字表示；

(2) 具有数值意义：等于某弦散声相对波长的数值。

同时设定，在正调规范之内， $[-1] = 1$ 。

前述系列方程已经表明各弦散声相对波长与各徽相对弦长之间的数值相互关系，现只需将数据代入方程，四弦散声相对波长为  $\frac{2}{3}$ 。故， $[-7] = [-4] \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 。其他依此类推。

运用这种方程式，可以对琴学文献，如《五知斋琴谱》、《琴学入门》等众多文献进行轻松解读。

## 2. 徽分计算方法

在《古琴徽分的顺逆推算》一文中，则建立了徽分的计算方法。以一弦为标本，给出根据徽分数据计算相对弦长的公式，重在突破各徽间距离不相等状况所造成的难点，让研究者可以根据公式，简便算出任何徽分数据的相对波长所对应的徽间音位（相对音高）。

这个公式的思路是：徽分按音的相对弦长（由真分数化为小数形式）减去右侧徽位相对弦长，这个差数除以两徽间的距离（见图 15）。例如，在第五章第三节“三分损益律徽外音”中的“下暗徽”（ $\frac{8}{9}$ ），与二弦散声相应，在《碣石调·幽兰》中被描述为“十三下半寸许”；《琴书大全》中描述为“十三徽外六分七厘”。图 15 中提供的信息是，十三徽至龙龈的距离为全弦的  $\frac{1}{8}$ ，从表 42 中我们查出十三徽的相对弦长为  $\frac{7}{8}$ 。有了这几个条件，就可以推算徽间音位。先将十三徽位的相对弦长（即正调一弦上十三徽的相对波长）以及下暗徽的相对弦长全部化为小数形式，

写出如下等式:

$$(\text{徽外音相对弦长} - \text{十三徽相对弦长}) \div \text{十三徽至龙眼的相对弦长} \\ = \left( \frac{8}{9} - \frac{7}{8} \right) \div \frac{1}{8} = (0.8888889 - 0.875) \times 8 = 0.1111$$

根据这个计算结果,可以明确这个徽外音为“十三徽一分”。

用这个计算方案,可以为正调一弦按音建立起“徽间音位相对弦长数据模式”,根据相对波长所含生律质因数的特征,分为六种类型,每类分上、中、下三准。这个数据模式在下、中、上三准依次移高一个八度、两个八度,共形成 18 个数据模式,然后在各弦上移位,共形成 126 个数据模式,将这 126 个数据制成 126 个表格。以三分生律类、一弦下准为例,所有相对弦长数值分母含 3,属于第一类,制表为:

表 75. 三分生律类·下准

表 1-1-1 (“表 1-1-1”表示第一类一下准—第一弦)

相对弦长 (正调一弦的 相对波长)	借用音位	校正值	所登记的徽序号	推算过程的算式	计算结果	写成徽分
$\frac{2048}{2187}$		+07	十二	$(0.9364426 - 0.875) \times 8$	0.4915	十三徽半
$\frac{8}{9}$		+02	十三	$(0.8888889 - 0.875) \times 8$	0.1111	十三徽一分
$\frac{64}{81}$		+04	十	$(0.7901235 - 0.75) \times 20$	0.8025	十徽八分
$\frac{512}{729}$		+06	九	$(0.7023320 - 0.6666667) \times 12$	0.4280	九徽四分
$\frac{2}{3}$		+01	九	$(0.6666667 - 0.6666667) \times 12$	0	九徽
$\frac{16}{27}$		+03	七	$(0.5925926 - 0.5) \times 10$	0.9259	七徽九分
$\frac{128}{243}$		+05	七	$(0.5267490 - 0.5) \times 10$	0.2675	七徽三分

如此编制出 126 个徽分登记表格,作为琴律学理论数据库的基本内容。

这些数据可以穷尽古琴演奏中所涉及的所有徽分可能。从某一自然音程所要求的按音相对弦长数值，推算相应的徽分，这是顺向推算；根据所设定的徽分，推算出相应的相对弦长，这是逆向推算。

古琴减字谱是指位谱，演奏者根据谱中的指示，按某弦某徽分，就可以得到一个确定的音高。律学的责任需要对此进行充分剖析，不是被动地从演奏中得知某徽分按音是什么音程，而要主动把握每个按音节点的音律内涵。逆向推算法系统化地将一条弦上所有的徽位和徽间音位都转换成相对长度数值，设计公式为：

（徽位的相对长度数值+徽分的相对长度数值）÷空弦全长的相对数值

将空弦全长的相对数值设定为 1200，这样可以保持整数局面，很容易运用四则运算来求每个徽分的相对弦长。每两徽间含九分，全部设定为  $13 \times 9 = 117$  个徽分数值，按规定公式计算得出 117 个相对弦长数值。根据图 14、15 中的数据，可以求出十三徽各徽的相对长度数值以及每两徽间每一分的相对长度数值。

欲求六徽五分的相对弦长：

$$\text{六徽的相对长度数值} = 1200 \times \frac{2}{5} = 480$$

$$\text{六、七两徽之间的一分相对长度数值} = 1200 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 12$$

代入公式（徽位的相对长度数值+徽分的相对长度数值）÷空弦全长的相对数值

$$\begin{aligned} \text{六徽五分} &= (480 + 5 \times 12) \div 1200 = (480 + 60) \div 1200 = 0.45 \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

用这样的方法建立起理论数据库：先求出各徽的相对长度数值、每徽以左徽分的相对长度数值、实际推算用计算公式，设计

成一个包含一至十三徽、徽分相对长度数值、十三个公式的基本数据表格。然后将十三个公式代入,求出 117 个徽分的相对弦长,制成详尽的徽分登记表。

用徽位计算法和徽分顺逆推算法,可以制作出详尽的琴律登记表,建立琴律学现代化研究方法体系,对琴谱、琴论中隐藏在繁琐文字描述中的律学内容进行清理,把握琴律、琴论中有价值的遗产,使封尘太久的琴律传统得到开拓。

#### 四、有关笛律的研究

在西方,长期以来,人们认为管弦同长同音,直到 18 世纪,近代物理学流体动力学研究发现,才促使音乐领域管口校正问题成为研究热点,甚至直到 19 世纪末,“管弦同长同音”仍是非常权威的说法。而在中国,荀勖笛律所获得的系统而又简单的管口校正数则是发生在公元 3 世纪,这一音乐声学史上的创举令西方人惊讶不已。荀勖笛律在古代解决了管口校正问题,但由于只是经验性约数而非物理学上的精确数据,并允许随机修正加以补正,故其作为一种科学成就来看,其学术价值与历史价值就都显不足,因此,侧孔校正仍是一个物理学难题。荀勖的方法和数据本身也形成一个研究视点,这方面的研究除了一些散见于各音乐期刊上的论文,比较集中的成果体现在王子初的专著《荀勖笛律研究》。该著作的基本观点是:

1. 通过实验,实证分析得出荀勖管口校正形式为“侧孔校正”而非“端口校正”,否定了此前先验地套用声学的端口校正公式解释“荀勖笛律”的方法论,指出近现代物理学所提出的管口校正计算公式以及明代朱载堉所用理论方法均为端口校正问题,并非我国笛类乐器制作业的经验性做法。
2. 经过实验,实证分析得出荀勖十二笛为异径管,否定了

此前“同径管”的说法。

3. 通过实验证明荀勖的“管口校正数”只是具有实用价值的经验性约数，否定了此前荀勖“管口校正数”为“宫角之差”的说法。

4. 荀勖对端口不做校正虽不足取，却另外反映出笛律与琴律的联系，因为荀勖笛上角声不做校正，听觉上接近纯律大三度，符合当时古琴实践上常用十一徽的运律习惯。

5. 荀勖笛律体现了近似十八律的意识，是在实践中寻求十八律的重要先驱。

6. 证明荀勖十二管是“正律器”而非乐器，对此前被批评为“不可吹”做出重要正名。

## 五、有关中立音的研究

如果把“中立音”广泛地理解为在相距半音的两音律之间插入的音律，它的出现则可追溯到古希腊单声音乐时期，即古希腊音乐理论中的“四分音四音列”。

中国各地普遍存在的中立音程真正得到律学上的重视和理论解释始自 20 世纪，第一次以确切的律学表述发表则是在《律学》1983 年增订版，有专门一节“中国等地区的中立音程”，特别提及秦腔苦音音乐和山西中路梆子音乐中常用的含中立音的调式，并首度命名为中立音徵调式<sup>①</sup>。该著根据测音数据得出如下结论：这种中立音徵调式实际上已经进入四分之三音体系的范围，可以视为五声体系与四分之三音体系的结合；如将该调式中的四度音作为主音，则构成中立音宫调式，其中的中立四度可以认为是谐音列中的 11 号谐音，与主音的频率比是 11 : 8，计 551

<sup>①</sup> 《律学》第 203~206 页。

音分。

对中国音乐中立音程做出真正建设性理论阐述的，当推赵宋光的一篇专题论文《关于 $\frac{3}{4}$ 音的律学假设》。<sup>①</sup> 该文以“跃迁”概念解释了普通五声调式转化为中立音五声调式的数理通道：

徵调类色彩音可能半降，羽调类色彩音可能半升，各自有“11化”、“13化”两条途径。

徵调类色彩音，以相对波长数值来表述，在阳仪中是 $\frac{1}{27}$ ，在阴仪中是32。在两种结构中，该色彩音都有半降的数理通道。

(甲) 呈现徵调类色彩的三阶音列作阳仪表述：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{徵} & \text{羽} & \text{宫} \\
 \text{波长连比} & \frac{1}{24} : \frac{1}{27} : \frac{1}{32} \\
 & \downarrow \\
 & \boxed{\frac{1}{27} \times \frac{27}{26} = \frac{1}{26}} \times \frac{27}{26} \text{ 是徵调类色彩音半降的“阳} \\
 & & \text{仪 13 化跃迁算子”。} \\
 & \downarrow \\
 & \frac{1}{24} : \frac{1}{26} : \frac{1}{32} \\
 & = \frac{1}{12} : \frac{1}{13} : \frac{1}{16} \\
 \text{间距音程系数} & \frac{13}{12} & \frac{16}{13}
 \end{array}$$

(乙) 呈现徵调类色彩的三阶音列作阴仪表述：

<sup>①</sup> 该文首发于《中央音乐学院学报》1982年第2期，第8—12页。



徵      羽      宫  
 波长连比 36 : 32 : 27



$$\boxed{32 \times \frac{33}{32} = 33} \times \frac{33}{32} \text{ 是徵调类色彩音半降的“阴仪 11 化跃迁算子”。}$$



$$\begin{aligned} & 36 : 33 : 27 \\ & = 12 : 11 : 9 \end{aligned}$$

间距音程系数  $\frac{12}{11} \quad \frac{11}{9}$

羽调类色彩音，以相对波长数值来表述，在阴仪中是 27，在阳仪中是  $\frac{1}{32}$ 。在两种结构中，该色彩音都有半升的数理通道。

(丙) 呈现羽调类色彩的三阶音列作阴仪表述：

羽      宫      商  
 波长连比 32 : 27 : 24



$$\boxed{27 \times \frac{26}{27} = 26} \times \frac{26}{27} \text{ 是羽调类色彩音半升的“阴仪 13 化跃迁算子”。}$$



$$\begin{aligned} & 32 : 26 : 24 \\ & = 16 : 13 : 12 \end{aligned}$$

间距音程系数  $\frac{16}{13} \quad \frac{13}{12}$

(丁) 呈现羽调类色彩的三阶音列作阳仪表述：

羽      宫      商  
 波长连比  $\frac{1}{27} : \frac{1}{32} : \frac{1}{36}$



$$\boxed{\frac{1}{32} \times \frac{32}{33} = \frac{1}{33}} \times \frac{32}{33} \text{ 是羽调类色彩音半升的“阳仪 11 化跃迁算子”。}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{27} : \frac{1}{33} : \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{9} : \frac{1}{11} : \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\text{间距音程系数 } \frac{11}{9} \quad \frac{12}{11}$$

在该文发表之后 15 年,赵宋光先生在讲课中又指出,纯律的大三度与小三度也有转化为中立三度的跃迁通道,它们分别是  $\times \frac{40}{39}$  及其倒数、 $\times \frac{45}{44}$  及其倒数。

在大调内,主音上方纯律大三度音是大调秉性的标识,相对波长是  $\frac{4}{5}$ 。它作半降演变的数理通道有两条:  $\times \frac{40}{39}$ 、 $\times \frac{45}{44}$ 。

大调音阶前半截

	主	重	(大)	下			
	音	属	中	属			
	音	音	音	音			
波长连比	1	:	$\frac{8}{9}$	:	$\frac{4}{5}$	:	$\frac{3}{4}$



$$\boxed{\frac{4}{5} \times \frac{40}{39} = \frac{32}{39}} \times \frac{40}{39} \text{ 是大调中音半降的“阳仪 13 化跃迁算子”。}$$



$$1 : \frac{8}{9} : \frac{32}{39} : \frac{3}{4}$$

$$\text{间距音程系数} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{13}{12} \quad \frac{128}{117}$$

$$\text{纯律大三度} \quad \frac{4}{5} = \frac{32}{40} \rightarrow \frac{32}{39} = \frac{32}{39}, \text{音程值为 } 1.7124 \text{ 全音,}$$

342.48 音分;

$$\frac{4}{5} \downarrow$$

$$\boxed{\frac{4}{5} \times \frac{45}{44} = \frac{9}{11}} \times \frac{45}{44} \text{ 是大调中音半降的}$$

“阳仪 11 化跃迁算子”。

$$\downarrow$$

$$1 : \frac{8}{9} : \frac{9}{11} : \frac{3}{4}$$

$$\text{间距音程系数} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{88}{81} \quad \frac{12}{11}$$

$$\text{纯律大三度} \quad \frac{4}{5} = \frac{36}{45} \rightarrow \frac{36}{44} = \frac{9}{11}, \text{音程值为 } 1.737 \text{ 全音,}$$

347.408 音分。

在小调内，主音上方纯律小三度音是小调秉性的标识，相对波长是  $\frac{5}{6}$ 。它作半升演变的数理通道有两条： $\times \frac{39}{40}$ 、 $\times \frac{44}{45}$ 。

小调音阶前半截

主	重	(小)	下
音	属	中	属
	音	音	音
波长连比	1	:	$\frac{8}{9}$ :
			$\frac{5}{6}$ :
			$\frac{3}{4}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{5}{6} \times \frac{39}{40} = \frac{13}{16}} \times \frac{39}{40} \text{ 是小调中音半升的}$$

“阴仪 13 化跃迁算子”。

$$\downarrow$$

$$1 : \frac{8}{9} : \frac{13}{16} : \frac{3}{4}$$

$$\text{间距音程系数} \frac{9}{8} \quad \frac{128}{117} \quad \frac{13}{12}$$

纯律小三度  $\frac{5}{6} = \frac{40}{48} \rightarrow \frac{39}{48} = \frac{13}{16}$ , 音程值为 1.797 全音,  
359.46 音分;

$$\frac{5}{6}$$



$$\boxed{\frac{5}{6} \times \frac{44}{45} = \frac{22}{27}} \times \frac{44}{45} \text{ 是小调中音半升的}$$

“阴仪 11 化跃迁算子”。



$$1 : \frac{8}{9} : \frac{22}{27} : \frac{3}{4}$$

$$\text{间距音程系数} \frac{9}{8} \quad \frac{12}{11} \quad \frac{88}{81}$$

纯律小三度  $\frac{5}{6} = \frac{45}{54} \rightarrow \frac{44}{54} = \frac{22}{27}$ , 音程值为 1.77273 全音,  
359.46 音分。

以上演示的是一个音调模型的跃迁过程, 完整的跃迁实现是在调式音阶中, 现只列出结果 (举两个例子)。

表 76. “13 化跃迁” 苦音徵调式五声音阶<sup>①</sup>

徵调式五声音阶唱名	徵		<sup>+</sup> 清羽		宫		商		<sup>+</sup> 清角		徵
供参考的现代音名	g		<sup>+</sup> b <sup>b</sup>		c <sup>1</sup>		d <sup>1</sup>		<sup>+</sup> f		
相对弦长	1		$\frac{13}{16}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{13}{24}$		$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数	$\frac{16}{13}$		$\frac{13}{12}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{13}$		$\frac{13}{12}$		
相邻两音音程值 (以全音数表示)	1. 797		0. 693		1. 02		1. 797		0. 693		

表 77. “11 化跃迁” 韩国半降羽徵调式五声音阶

徵调式五声音阶唱名	徵		<sup>c</sup> 羽		宫		商		<sup>c</sup> 角		徵
供参考的现代音名	g		<sup>c</sup> a		c <sup>1</sup>		d <sup>1</sup>		<sup>c</sup> e <sup>1</sup>		g <sup>1</sup>
相对弦长	1		$\frac{11}{12}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{11}{18}$		$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数	$\frac{12}{11}$		$\frac{11}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{12}{11}$		$\frac{11}{9}$		
相邻两音音程值 (以全音数表示)	0. 75		1. 74		1. 02		0. 75		1. 74		

除了前面提到的 1983 年版《律学》添加了“中国等地区中立音程”一节，1982 年赵宋光发表的《关于  $\frac{3}{4}$  音的律学假设》，有关中立音程的全面研究较集中地体现在李玫的《“中立音”音

<sup>①</sup> 具体计算过程详见李玫的《“中立音”音律现象的研究》。

律现象的研究》。此文从音乐声学、应用律学、乐器学、民族音乐学等多重角度，历史地看待这个音律现象，对此进行专门研究；音响来源得自社会调查，测音数据得自中国艺术研究院音乐研究所音响视听技术室；文献来源得自正式出版物和调查记录。主要论点：（1）“中立音”是合乎谐音简比关系的自然音律现象，并且已经在音乐实践中形成了朴素的应用体系；“中立音”的使用有着复杂的人文意义的价值取向，这种听觉偏爱具有鲜明的审美特征。（2）“中立音”作为音响的主观感受，与客观物理量度之间的对应关系可以借助现代数学表达式得以体现。（3）“中立音”现象是散见于世界各地的具有相似外表的音律现象，但其间的文化联系各不相同。有些是文化的各自独立发展、至今仍属不同的音乐体系；有些则由于文化传播的历史机缘而属体系内的纵向传承发展。中立音的审美效果就像一剂浓郁的糊辣汤，令人“热耳酸心”。

立足于自然数和简单整数比值原则的研究方法还要提到应有勤在《重新认识甘美兰的斯连德若音阶》长文中用律学的方法探讨他民族音阶问题。他从协和度和简比音程的关系入手，提出比大、小全音（9：8、10：9）关系更简单的两种音程 7：6（267 音分）、8：7（231 音分）是构成斯连德若音阶的重要结构因素，第 7 谐音是论证斯连德若音阶的重要基础，推导出一个斯连德若音阶的数理模式： $\frac{3}{2}$ （纯五度）=  $\frac{7}{6}$ （斯连德若小三度） $\times \frac{8}{7}$ （斯连德若大二度） $\times \frac{9}{8}$ （大全音）。

关于在前边讨论《淮南子》律数时遇到的质数 17、19，在现代律学和和声学研究中也得到开发。“17 分、17 倍”与“19 分、19 倍”的成双生律，为我们找到了减和弦和增和弦功能多

义性的解释途径。虽然在已经正式发表的论著中还没有发现上述原理的系统阐发,但在1979年召开的全国和声学学术报告会上,赵宋光先生提交的论文之二《关于减七、增六和弦的功能的争议》,对“17分、17倍”生律法与减七和弦功能两可的相关性作了详细的阐述,但该报告会的论文汇编并非正式出版物。在正式出版的刊物上发表的有关论文有:(1)赵宋光《数在音乐表现手段中的意义》(载《美学》第五辑1983年);(2)刘彤文《增六和弦用法的理论辨析》(载《中央音乐学院学报》2004年第3期)。欧洲三百年的音乐实践中也早就运用了包含这种生律法的和弦结构,因为这些生律法所产生的音程关系与平均律的半音、全音极其近似,人们很容易用平均律来模拟、仿制,因而忽略了这一律学史上的理论成就。令人意外的是,早在二千多年前的《淮南子》律数中就已透露出它们的理性表述。

### 最后的话:学科发展的未来走向

从上述对律学学科的概括总结,我们可以看到,从方法体系的建立、各种律制的形成、历史发展及现代研究,我们有一部悠久而持续发展的律学史,留下了丰富的律学文献,少有国家或民族能够与之比肩。但由于在奴隶制、封建制漫长时期中,迷信观念与律学的数理科学内容长久混杂,对于音律的自然律数研究总被一些伪学术附会于天文历数,在近现代更是由于被误解为封建迷信和神秘主义而被民主革命及新学冲刷,几乎成为绝学。很少有人认为不懂律学是一个知识缺陷。

当代音乐教育在欧洲音乐学观念影响下造成了对律学的深重误会。随着新世纪的到来,这误会的迷雾必将渐渐消散。有能力进行律学研究的中华音乐学界群体对驱散这迷雾负有不可推卸的历史责任。律学学科继续发展和当前动态,可概括为如下七

方面:

1. 琴律钟律研究。

对七弦琴艺术宝库所保存的大量乐谱与文论进行律学研究,以其成果对出土编钟铭文进行律学解读,从而对钟律、琴律互为表里的逻辑结构予以科学阐明,是继承中华文化遗产珍宝这一壮阔思潮的有机组成部分。

2. 以律学研究支持旋律学学科建设。

旋律学学科建设是对欧洲东传的作曲技术理论课程网络缺漏的重要弥补。旋律学学科建设若要立足于科学规范的基地上不遭挫败,不可缺少律学研究成果的支持。

3. 以律学研究排解和声学的功能理论研究长期面临的难题与困惑。

和声学的功能理论研究长期以来遭遇了许多意见分歧与逻辑矛盾,且因其旷日持久的难解困惑而陷入致命的危机。要有效地从危机中拯救和声学学科的命运,不能不倚仗律学研究的科学成果。

4. 为世界民族音乐学研究的纵深推进提供强劲的钻杆。

世界民族音乐学所积累的浩瀚采访资料向研究者提出大量难懂的音律之谜。要使世界多元音乐文化的珍贵遗产普遍地得到继承,各自获得应占的地位,必须以揭开这些谜底为前提。在这一努力中,需要律学研究科学方法的支援。

5. 开设律学课程。

在音乐学院、艺术学院、师范学院、教育学院、音乐中专的基础课程中,长期以来的律学匮乏亟待补足,编写相关的教科书是律学研究者的职责。律学课程的教材中,应包括世界各国律学研究历史成果的系统化梳理介绍。



#### 6. 充实基础乐理教材。

欧洲引入的传统基础乐理课程对音律数理的讲解粗拙不明，使学生一知半解。这一现状的扭转要靠律学研究者对基础乐理教材的有关部分作精心改写。

#### 7. 为音乐表演艺术提供参照。

声乐表演艺术和器乐表演艺术在实践与教学过程中遇到大量和谐问题和音准问题，因缺乏科学准则而使难题无法解决的状况由来已久。律学研究者有责任为之提供科学的分析方法，帮助音乐表演艺术家掌握可靠的思维工具。

由于具有悠久深厚的历史传统和 20 世纪积累的领先成果，律学研究队伍的组建在当代中国是有优越条件的。每一位有志于为上述历史使命做出贡献的音乐学者都有机会成为这队伍中的一员。

# 附 录

## 一、古琴各弦徽位音律表

在古琴实践中长期运用的琴律观念用当代理论律学的功能逻辑思维进行整合,可以建立如下矩阵,即音系网(数值小于 $\frac{1}{2}$ 或大于1者,不予列入,由数值大于 $\frac{1}{2}$ 或小于1者代表)。

正文中“琴律学”一章根据古籍文献整理的琴五调定弦,各弦散声相对波长都可以在网络中找到相应的方位:

图示:琴律音系网

阳链左段					阳链右段																			
-.09					-.08					-.07					-.06					-.05				
D					A					E					B					#F				
$\frac{9}{10}$					$\frac{3}{5}$					$\frac{4}{5}$					$\frac{8}{15}$					$\frac{32}{45}$				
-.03		-.02		-.01							+.01		+.02		+.03				+.04		+.05		+.06	
bE		bB		F		C					G		D		A				E		B		#F	
$\frac{27}{32}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{3}{4}$		1					$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{16}{27}$				$\frac{64}{81}$		$\frac{128}{243}$		$\frac{512}{729}$	
				+.06		+.07		+.08			+.09		+.10		+.11									
		bD		bA		bE			bB		F		C											
		$\frac{15}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{5}{6}$			$\frac{5}{9}$		$\frac{20}{27}$		$\frac{80}{81}$											
阴链左段					阴链右段																			

在各弦散声波长如此布列的基础上,所有徽位音律的相对波长也都可以在这个音系网的功能扩充形态时各自找到相应的方位(不包含第十三徽按音)。

如正文中表 42 所做的工作那样, 以下将根据各种相生关系, 呈逻辑关系排列出 20+8 (高低八度) 共 28 张表格, 表格顺序按基链、阴链、阳链排列。

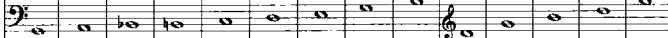
### 1. 基中. 1 (一弦)

相对音高	0	1.16	1.58	1.93	2.49	3.51	4.42	6	7.93	9.51	12	13.93	15.51	18
校正值	0	+16	+08	-07	-01	+01	-08		-07	+01		-07	+01	
借用记谱														
相对波长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	1												
	二等分者							$\frac{1}{2}$						
	三等分者					$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$				
	四等分者				$\frac{3}{4}$			$\frac{2}{4}$			$\frac{1}{4}$			
	五等分者			$\frac{4}{5}$			$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{5}$			$\frac{1}{5}$		
	六等分者		$\frac{5}{6}$			$\frac{4}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{2}{6}$			$\frac{1}{6}$	
	八等分者		$\frac{7}{8}$		$\frac{6}{8}$			$\frac{4}{8}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

## 2. 基中.2 (六弦)

相对音高	6	7.16	7.58	7.93	8.49	9.51	10.42	12	13.93	15.51	18	19.93	21.51	24
校正值		+16	+08	-07	-01	+01	-08		-07	+01		-07	+01	
借用记谱														
相对波长	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{1}{2}$												
	二等分者							$\frac{1}{4}$						
	三等分者					$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{6}$				
	四等分者				$\frac{3}{8}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$			
	五等分者			$\frac{2}{5}$			$\frac{3}{10}$		$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{10}$		
	六等分者		$\frac{5}{12}$			$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{12}$		$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{12}$	
	八等分者		$\frac{7}{16}$		$\frac{3}{8}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{16}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

## 3. 基右表 1 (四弦)

相对音高		3.51	4.67	5.09	5.44	6	7.02	7.93	9.51	11.44	13.02	15.51	17.44	19.02	21.51
校正值		+01	+17	+09	-06		+02	-07	+01	-06	+02	+01	-06	+02	+01
借用记谱															
相对波长		$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$
徽位编号			十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一	
相 对 波 长	散声	$\frac{2}{3}$													
	二等分者							$\frac{1}{3}$							
	三等分者					$\frac{4}{9}$				$\frac{2}{9}$					
	四等分者				$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{6}$			$\frac{1}{6}$				
	五等分者			$\frac{8}{15}$			$\frac{2}{5}$		$\frac{4}{15}$			$\frac{2}{15}$			
	六等分者		$\frac{5}{9}$			$\frac{4}{9}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{2}{9}$			$\frac{1}{9}$		
	八等分者		$\frac{7}{12}$		$\frac{6}{12}$			$\frac{4}{12}$			$\frac{2}{12}$			$\frac{1}{12}$	
相对弦长		1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

4. 基右表 2.1 (二弦)

相对音高		1.02	2.18	2.6	2.95	3.51	4.53	5.44	7.02	8.95	10.53	13.02	14.95	16.53	19.02
校正值		+02	+18	+10	-05	+01	+03	-06	+02	-05	+03	+02	-05	+03	+02
借用记谱															
相对波长		$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$
徽位编号			十二	十二	十二	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{8}{9}$													
	二等分者								$\frac{4}{9}$						
	三等分者						$\frac{16}{27}$				$\frac{8}{27}$				
	四等分者					$\frac{2}{3}$			$\frac{4}{9}$			$\frac{2}{9}$			
	五等分者				$\frac{32}{45}$			$\frac{8}{15}$		$\frac{16}{45}$			$\frac{8}{45}$		
	六等分者			$\frac{20}{27}$			$\frac{16}{27}$		$\frac{12}{27}$		$\frac{8}{27}$			$\frac{4}{27}$	
	八等分者		$\frac{7}{9}$			$\frac{6}{9}$			$\frac{4}{9}$			$\frac{2}{9}$			$\frac{1}{9}$
相对弦长		1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

5. 基右表 2.2 (七弦)

相对音高	7.02	8.18	8.60	8.95	9.51	10.53	11.44	13.02	14.95	16.53	19.02	20.95	22.53	25.02
校正值	+02	+18	+10	-05	+01	+03	-06	+02	-05	+03	+02	-05	+03	+02
借用记谱														
相对波长	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{4}{9}$												
	二等分者							$\frac{2}{9}$						
	三等分者					$\frac{8}{27}$			$\frac{4}{27}$					
	四等分者				$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{9}$			$\frac{1}{9}$			
	五等分者			$\frac{16}{45}$			$\frac{4}{15}$		$\frac{8}{45}$			$\frac{4}{45}$		
	六等分者		$\frac{10}{27}$			$\frac{8}{27}$		$\frac{6}{27}$	$\frac{4}{27}$				$\frac{2}{27}$	
	八等分者		$\frac{7}{18}$		$\frac{6}{18}$			$\frac{4}{18}$		$\frac{2}{18}$				$\frac{1}{18}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

6. 基右表 3 (五弦)

相对音高	4.53	5.69	6.11	6.46	7.02	8.04	8.95	10.53	12.46	14.04	16.53	18.46	20.04	22.53
校正值	+03	+19	+11	-04	+02	+04	-05	+03	-04	+04	+03	-04	+04	+03
借用记谱														
相对波长	$\frac{16}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{135}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{135}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{2}{27}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{16}{27}$												
	二等分者							$\frac{8}{27}$						
	三等分者					$\frac{32}{81}$				$\frac{16}{81}$				
	四等分者				$\frac{4}{9}$			$\frac{8}{27}$			$\frac{4}{27}$			
	五等分者			$\frac{64}{135}$			$\frac{16}{45}$		$\frac{32}{135}$			$\frac{16}{135}$		
	六等分者		$\frac{40}{81}$			$\frac{32}{81}$		$\frac{24}{81}$		$\frac{16}{81}$			$\frac{8}{81}$	
	八等分者		$\frac{14}{27}$			$\frac{12}{27}$		$\frac{8}{27}$			$\frac{4}{27}$			$\frac{2}{27}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$



7. 基右表 4 (慢三弦)

相对音高	2.04	3.19	3.62	3.97	4.53	5.55	6.46	8.04	9.97	11.55	14.04	15.97	17.55	20.04
校正值	+04	+19	+12	-03	+03	+05	-04	+04	-03	+05	+04	-03	+05	+04
借用记谱														
相对波长	$\frac{64}{81}$	$\frac{56}{81}$	$\frac{160}{243}$	$\frac{256}{405}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{128}{405}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{64}{405}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{8}{81}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{64}{81}$												
	二等分者							$\frac{32}{81}$						
	三等分者					$\frac{128}{243}$				$\frac{64}{243}$				
	四等分者				$\frac{16}{27}$			$\frac{32}{81}$			$\frac{16}{81}$			
	五等分者			$\frac{256}{405}$			$\frac{64}{135}$		$\frac{128}{405}$			$\frac{64}{405}$		
	六等分者		$\frac{160}{243}$			$\frac{128}{243}$		$\frac{96}{243}$		$\frac{64}{243}$			$\frac{32}{243}$	
	八等分者		$\frac{56}{81}$		$\frac{48}{81}$			$\frac{32}{81}$			$\frac{16}{81}$			$\frac{8}{81}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

## 8. 基右表 5.1 (慢六弦)

相对音高		5.55	6.70	7.13	7.48	8.04	9.06	9.97	11.55	13.48	15.06	17.55	19.48	21.06	23.55
校正值		+05	+20	+13	-02	+04	+06	-03	+05	-02	+06	+05	-02	+06	+05
借用记谱															
相对波长		$\frac{128}{243}$	$\frac{112}{243}$	$\frac{320}{729}$	$\frac{512}{1215}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{256}{729}$	$\frac{128}{405}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{256}{1215}$	$\frac{128}{729}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{128}{1215}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{16}{243}$
徽位编号			十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{128}{243}$													
	二等分者								$\frac{64}{243}$						
	三等分者						$\frac{256}{729}$				$\frac{128}{729}$				
	四等分者					$\frac{32}{81}$			$\frac{64}{243}$			$\frac{32}{243}$			
	五等分者				$\frac{512}{1215}$			$\frac{128}{405}$		$\frac{256}{1215}$			$\frac{128}{1215}$		
	六等分者			$\frac{320}{729}$			$\frac{256}{729}$		$\frac{192}{729}$		$\frac{128}{729}$			$\frac{64}{729}$	
	八等分者		$\frac{112}{243}$			$\frac{96}{243}$			$\frac{64}{243}$			$\frac{32}{243}$			$\frac{16}{243}$
	相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

9. 基右表 5.2 (慢一弦)

相对音高	-0.45	0.70	1.13	1.48	2.04	3.06	3.97	5.55	7.48	9.06	11.55	13.48	15.06	17.55
校正值	+05	+20	+13	-02	+04	+06	-03	+05	-02	+06	+05	-02	+06	+05
借用记谱														
相对波长	$\frac{256}{243}$	$\frac{224}{243}$	$\frac{640}{729}$	$\frac{1024}{1215}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{256}{405}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{1215}$	$\frac{256}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{256}{1215}$	$\frac{128}{729}$	$\frac{32}{243}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{256}{243}$												
	二等分者							$\frac{128}{243}$						
	三等分者					$\frac{512}{729}$				$\frac{256}{729}$				
	四等分者				$\frac{64}{81}$			$\frac{128}{243}$			$\frac{64}{243}$			
	五等分者			$\frac{1024}{1215}$			$\frac{256}{405}$		$\frac{512}{1215}$			$\frac{256}{1215}$		
	六等分者		$\frac{640}{729}$			$\frac{512}{729}$		$\frac{384}{729}$		$\frac{256}{729}$			$\frac{128}{729}$	
	八等分者		$\frac{224}{243}$		$\frac{192}{243}$			$\frac{128}{243}$			$\frac{64}{243}$			$\frac{32}{243}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

10. 基右表 6 (慢四弦)

相对音高	3.06	4.21	4.64	4.99	5.55	6.57	7.48	9.06	10.99	12.57	15.06	16.99	18.57	21.06
校正值	+06	+21	+14	-01	+05	+07	-02	+06	-01	+07	+06	-01	+07	+06
借用记谱														
相对波长	$\frac{512}{729}$	$\frac{448}{729}$	$\frac{1280}{2187}$	$\frac{2048}{3645}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1024}{2187}$	$\frac{512}{1215}$	$\frac{256}{729}$	$\frac{1024}{3645}$	$\frac{512}{2187}$	$\frac{128}{729}$	$\frac{512}{3645}$	$\frac{256}{2187}$	$\frac{64}{729}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{512}{729}$												
	二等分者							$\frac{256}{729}$						
	三等分者					$\frac{1024}{2187}$				$\frac{512}{2187}$				
	四等分者				$\frac{128}{243}$			$\frac{256}{729}$			$\frac{128}{729}$			
	五等分者			$\frac{2048}{3645}$			$\frac{512}{1215}$		$\frac{1024}{3645}$			$\frac{512}{3645}$		
	六等分者		$\frac{1280}{2187}$			$\frac{1024}{2187}$		$\frac{768}{2187}$		$\frac{512}{2187}$			$\frac{256}{2187}$	
	八等分者		$\frac{448}{729}$			$\frac{384}{729}$			$\frac{256}{729}$		$\frac{128}{729}$			$\frac{64}{729}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

11. 基左表 1 (三弦)

相对音高		2.49	3.65	4.07	4.42	4.98	6	6.91	8.49	10.42	12	14.49	16.42	18	20.49
校正值		-0.01	+0.15	+0.07	-0.08	-0.02		-0.09	-0.01	-0.08		-0.01	-0.08		-0.01
借用记谱															
相对波长		$\frac{3}{4}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$
徽位编号			十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{3}{4}$													
	二等分者								$\frac{3}{8}$						
	三等分者						$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{4}$				
	四等分者					$\frac{9}{16}$			$\frac{6}{16}$			$\frac{3}{16}$			
	五等分者				$\frac{3}{5}$			$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$				$\frac{3}{20}$		
	六等分者			$\frac{5}{8}$			$\frac{4}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$	
	八等分者		$\frac{21}{32}$			$\frac{18}{32}$			$\frac{12}{32}$			$\frac{6}{32}$			$\frac{3}{32}$
相对弦长		1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

12. 基左表 2.1 (紧五弦)

相对音高	4.98	6.14	5.56	6.91	7.47	8.49	9.40	10.98	12.91	14.49	16.98	18.91	20.49	22.98
校正值	-.02	+.14	+.06	-.09	-.03	-.01	-.10	-.02	-.09	-.01	-.02	-.09	-.01	-.02
借用记谱														
相对波长	$\frac{9}{16}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{128}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{9}{16}$												
	二等分者							$\frac{9}{32}$						
	三等分者					$\frac{3}{8}$				$\frac{3}{16}$				
	四等分者				$\frac{27}{64}$			$\frac{18}{64}$			$\frac{9}{64}$			
	五等分者			$\frac{9}{20}$			$\frac{27}{80}$		$\frac{9}{40}$			$\frac{9}{80}$		
	六等分者			$\frac{15}{32}$		$\frac{12}{32}$		$\frac{9}{32}$		$\frac{6}{32}$			$\frac{3}{32}$	
	八等分者		$\frac{63}{128}$		$\frac{54}{128}$			$\frac{32}{128}$			$\frac{18}{128}$			$\frac{9}{128}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

13. 基左表 2.2 (黄钟调再慢一弦)


相对音高	-1.02	0.14	0.56	0.91	1.47	2.49	3.40	4.98	6.91	8.49	10.98	12.91	14.49	16.98
校正值	-0.02	+0.14	+0.06	-0.09	-0.03	-0.01	-0.10	-0.02	-0.09	-0.01	-0.02	-0.09	-0.01	-0.02
借用记谱														
相对波长	$\frac{9}{8}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{9}{8}$												
	二等分者							$\frac{9}{16}$						
	三等分者					$\frac{3}{4}$				$\frac{3}{8}$				
	四等分者				$\frac{27}{32}$			$\frac{18}{32}$			$\frac{9}{32}$			
	五等分者			$\frac{9}{10}$			$\frac{27}{40}$	$\frac{9}{20}$				$\frac{9}{40}$		
	六等分者		$\frac{15}{16}$			$\frac{12}{16}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{6}{16}$			$\frac{3}{16}$	
	八等分者		$\frac{63}{64}$		$\frac{54}{64}$			$\frac{36}{64}$			$\frac{18}{64}$			$\frac{9}{64}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

14. 基左表 3.1 (紧二弦)

相对音高	1.47	2.63	3.05	3.40	3.96	4.98	5.89	7.47	9.40	10.98	13.47	15.40	16.98	19.47
校正值	-0.03	+0.13	+0.05	-0.10	-0.04	-0.02	-0.11	-0.03	-0.10	-0.02	-0.03	-0.10	-0.02	-0.03
借用记谱														
相对波长	$\frac{27}{32}$	$\frac{189}{256}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{81}{160}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{160}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{27}{32}$												
	二等分者							$\frac{27}{64}$						
	三等分者					$\frac{9}{16}$				$\frac{9}{32}$				
	四等分者				$\frac{81}{128}$			$\frac{54}{128}$			$\frac{27}{128}$			
	五等分者			$\frac{27}{40}$			$\frac{81}{160}$	$\frac{27}{80}$				$\frac{27}{160}$		
	六等分者		$\frac{45}{64}$			$\frac{36}{64}$		$\frac{27}{64}$		$\frac{18}{64}$			$\frac{9}{64}$	
	八等分者		$\frac{189}{256}$		$\frac{162}{256}$			$\frac{108}{256}$			$\frac{54}{256}$			$\frac{27}{256}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$



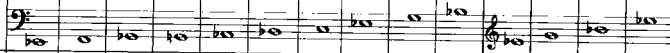
15. 基左表 3.2 (紧七弦)

相对音高	7.47	8.63	9.05	9.40	9.96	10.98	11.89	13.47	15.40	16.98	19.47	21.40	22.98	25.47
校正值	-0.03	+0.13	+0.05	-0.10	-0.04	-0.02	-0.11	-0.03	-0.10	-0.02	-0.03	-0.10	-0.02	-0.03
借用记谱														
相对波长	$\frac{27}{64}$	$\frac{189}{512}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{81}{320}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{160}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{27}{320}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{27}{512}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{27}{64}$												
	二等分者							$\frac{27}{128}$						
	三等分者					$\frac{9}{32}$				$\frac{9}{64}$				
	四等分者				$\frac{81}{256}$			$\frac{54}{256}$			$\frac{27}{256}$			
	五等分者			$\frac{27}{80}$			$\frac{81}{320}$		$\frac{27}{160}$			$\frac{27}{320}$		
	六等分者		$\frac{45}{128}$			$\frac{36}{128}$		$\frac{27}{128}$		$\frac{18}{128}$			$\frac{9}{128}$	
	八等分者		$\frac{189}{512}$			$\frac{162}{512}$		$\frac{108}{512}$			$\frac{54}{512}$			$\frac{27}{512}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

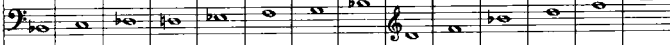
16. 阴右表 1.2 (紧七弦)

相对音高	7.58	8.73	9.16	9.51	10.07	11.09	12	13.58	15.51	17.09	19.58	21.51	23.09	25.58
校正值	+08	+23	+16	+01	+07	+09		+08	+01	+09	+08	+01	+09	+08
借用记谱														
相对波长	$\frac{5}{12}$	$\frac{35}{96}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{96}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{5}{12}$												
	二等分者							$\frac{5}{24}$						
	三等分者					$\frac{5}{18}$				$\frac{5}{36}$				
	四等分者				$\frac{5}{16}$			$\frac{10}{48}$			$\frac{5}{48}$			
	五等分者			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{12}$		
	六等分者		$\frac{25}{72}$			$\frac{20}{72}$		$\frac{15}{72}$		$\frac{10}{72}$			$\frac{5}{72}$	
	八等分者		$\frac{35}{96}$		$\frac{30}{96}$			$\frac{20}{96}$			$\frac{10}{96}$			$\frac{5}{96}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

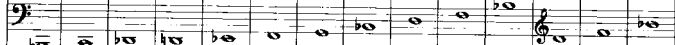
17. 阴右表 1 (紧二弦)

相对音高	1.58	2.73	3.16	3.51	4.07	5.09	6	7.58	9.51	11.09	13.58	15.51	17.09	19.58
校正值	+08	+23	+16	+01	+07	+09		+08	+01	+09	+08	+01	+09	+08
借用记谱														
相对波长	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{48}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{5}{6}$												
	二等分者							$\frac{5}{12}$						
	三等分者					$\frac{5}{9}$				$\frac{5}{18}$				
	四等分者				$\frac{5}{8}$			$\frac{10}{24}$			$\frac{5}{24}$			
	五等分者			$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{6}$		
	六等分者		$\frac{25}{36}$			$\frac{20}{36}$		$\frac{15}{36}$		$\frac{10}{36}$			$\frac{5}{36}$	
	八等分者		$\frac{35}{48}$		$\frac{30}{48}$			$\frac{20}{48}$			$\frac{10}{48}$			$\frac{5}{48}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

18. 阴右表 2.1 (紧五弦)

相对音高	5.09	6.24	6.67	7.02	7.58	8.60	9.51	11.09	13.02	14.60	17.09	19.02	20.60	23.09
校正值	+09	+24	+17	+02	+08	+10	+01	+09	+02	+10	+09	+02	+10	+09
借用记谱														
相对波长	$\frac{5}{9}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{54}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{5}{72}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{5}{9}$												
	二等分者							$\frac{5}{18}$						
	三等分者					$\frac{10}{27}$				$\frac{5}{27}$				
	四等分者				$\frac{5}{12}$			$\frac{10}{36}$			$\frac{5}{36}$			
	五等分者			$\frac{4}{9}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{9}$			$\frac{1}{9}$		
	六等分者		$\frac{25}{54}$			$\frac{20}{54}$		$\frac{15}{54}$		$\frac{10}{54}$			$\frac{5}{54}$	
	八等分者		$\frac{35}{72}$			$\frac{30}{72}$		$\frac{20}{72}$			$\frac{10}{72}$			$\frac{5}{72}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$


19. 阴右表 2.2 (黄钟调再慢一弦)

相对音高	-0.91	0.24	0.67	1.02	1.58	2.60	3.51	5.09	7.02	8.60	11.09	13.02	14.60	17.09
校正值	+0.09	+0.24	+0.17	+0.02	+0.08	+0.10	+0.01	+0.09	+0.02	+0.10	+0.09	+0.02	+0.10	+0.09
借用记谱														
相对波长	$\frac{10}{9}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{25}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{36}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{10}{9}$												
	二等分者							$\frac{5}{9}$						
	三等分者					$\frac{20}{27}$				$\frac{10}{27}$				
	四等分者				$\frac{5}{6}$			$\frac{10}{18}$			$\frac{5}{18}$			
	五等分者			$\frac{8}{9}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{9}$			$\frac{2}{9}$		
	六等分者			$\frac{25}{27}$		$\frac{20}{27}$		$\frac{15}{27}$		$\frac{10}{27}$			$\frac{5}{27}$	
	八等分者		$\frac{35}{36}$			$\frac{30}{36}$		$\frac{20}{36}$			$\frac{10}{36}$			$\frac{5}{36}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

20. 阴右表 3 (三弦)

相对音高	2.60	3.75	4.18	4.53	5.09	6.11	7.02	8.60	10.53	12.11	14.60	16.53	18.11	20.60
校正值	+10	+25	+18	+03	+09	+11	+02	+10	+03	+11	+10	+03	+11	+10
借用记谱														
相对波长	$\frac{20}{27}$	$\frac{35}{54}$	$\frac{50}{81}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{5}{54}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	
相 对 波 长	散声	$\frac{20}{27}$												
	二等分者							$\frac{10}{27}$						
	三等分者					$\frac{40}{81}$				$\frac{20}{81}$				
	四等分者				$\frac{5}{9}$			$\frac{10}{27}$			$\frac{5}{27}$			
	五等分者			$\frac{16}{27}$			$\frac{4}{9}$		$\frac{8}{27}$			$\frac{4}{27}$		
	六等分者		$\frac{50}{81}$			$\frac{40}{81}$		$\frac{30}{81}$		$\frac{20}{81}$			$\frac{10}{81}$	
	八等分者		$\frac{35}{54}$			$\frac{30}{54}$		$\frac{20}{54}$			$\frac{10}{54}$			$\frac{5}{54}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

21. 阴右表 4.2 (六弦)

相对音高		6.11	7.26	7.69	8.04	8.60	9.62	10.53	12.11	14.04	15.62	18.11	20.04	21.62	24.11
校正值		+11	+26	+19	+04	+10	+12	+03	+11	+04	+12	+11	+04	+12	+11
借用记谱															
相对波长		$\frac{40}{81}$	$\frac{35}{81}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{5}{81}$
徽位编号			十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{40}{81}$													
	二等分者								$\frac{20}{81}$						
	三等分者						$\frac{80}{243}$				$\frac{40}{243}$				
	四等分者					$\frac{10}{27}$			$\frac{20}{81}$			$\frac{10}{81}$			
	五等分者				$\frac{32}{81}$			$\frac{8}{27}$		$\frac{16}{81}$			$\frac{8}{81}$		
	六等分者			$\frac{100}{243}$			$\frac{80}{243}$		$\frac{60}{243}$		$\frac{40}{243}$			$\frac{20}{243}$	
	八等分者		$\frac{35}{81}$			$\frac{30}{81}$			$\frac{20}{81}$			$\frac{10}{81}$			$\frac{5}{81}$
相对弦长		1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

22. 阳中表 1 (慢三弦)

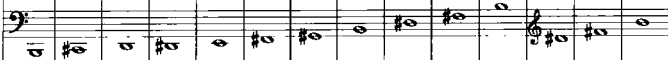
相对音高	1.93	3.09	3.51	3.86	4.42	5.44	6.35	7.93	9.86	11.44	13.93	15.86	17.44	19.93
校正值	-0.07	+0.09	+0.01	-0.14	-0.08	-0.06	-0.15	-0.07	-0.14	-0.06	-0.07	-0.14	-0.06	-0.07
借用记谱														
相对波长	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{4}{5}$												
	二等分者							$\frac{2}{5}$						
	三等分者					$\frac{8}{15}$				$\frac{4}{15}$				
	四等分者				$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{5}$			$\frac{1}{5}$			
	五等分者			$\frac{16}{25}$			$\frac{12}{25}$		$\frac{8}{25}$			$\frac{4}{25}$		
	六等分者		$\frac{2}{3}$			$\frac{8}{15}$		$\frac{6}{15}$		$\frac{4}{15}$			$\frac{2}{15}$	
	八等分者	$\frac{7}{10}$			$\frac{6}{10}$			$\frac{4}{10}$			$\frac{2}{10}$			$\frac{1}{10}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$



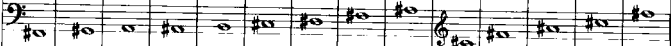
## 23. 阳右表 1 (慢六弦)

相对音高	5.44	6.60	7.02	7.37	7.93	8.95	9.86	11.44	13.37	14.95	17.44	19.37	20.95	23.44
校正值	-06	+10	+02	-13	-07	-05	-14	-06	-13	-05	-06	-13	-05	-06
借用记谱														
相对波长	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{32}{75}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{15}$
徽位编号		十二	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{8}{15}$												
	二等分者							$\frac{4}{15}$						
	三等分者					$\frac{16}{45}$			$\frac{8}{45}$					
	四等分者				$\frac{2}{5}$			$\frac{4}{15}$			$\frac{2}{15}$			
	五等分者			$\frac{32}{75}$			$\frac{8}{25}$	$\frac{16}{75}$			$\frac{8}{75}$			
	六等分者		$\frac{4}{9}$			$\frac{16}{45}$		$\frac{12}{45}$	$\frac{8}{45}$				$\frac{4}{45}$	
	八等分者		$\frac{7}{15}$		$\frac{6}{15}$			$\frac{4}{15}$			$\frac{2}{15}$			$\frac{1}{15}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

24. 阳右表 1.2 (慢一弦)

相对音高	-0.56	0.60	1.02	1.37	1.93	2.95	3.86	5.44	7.37	8.95	11.44	13.37	14.95	17.44
校正值	-0.06	+0.10	+0.02	-0.13	-0.07	-0.05	-0.14	-0.06	-0.13	-0.05	-0.06	-0.13	-0.05	-0.06
借用记谱														
相对波长	$\frac{16}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{32}{75}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{2}{15}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{16}{15}$												
	二等分者							$\frac{8}{15}$						
	三等分者					$\frac{32}{45}$				$\frac{16}{45}$				
	四等分者				$\frac{4}{5}$			$\frac{8}{15}$			$\frac{4}{15}$			
	五等分者			$\frac{64}{75}$			$\frac{16}{25}$		$\frac{32}{75}$			$\frac{16}{75}$		
	六等分者		$\frac{8}{9}$			$\frac{32}{45}$		$\frac{24}{45}$		$\frac{16}{45}$			$\frac{8}{45}$	
	八等分者		$\frac{14}{15}$		$\frac{12}{15}$			$\frac{8}{15}$			$\frac{4}{15}$			$\frac{2}{15}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

25. 阳右表 2 (慢四弦) 侧商调

相对音高	2.95	4.11	4.53	4.88	5.44	6.46	7.37	8.95	10.88	12.46	14.95	16.88	18.46	20.95
校正值	-0.05	+0.11	+0.03	-0.12	-0.06	-0.04	-0.13	-0.05	-0.12	-0.04	-0.05	-0.12	-0.04	+0.06
借用记谱														
相对波长	$\frac{32}{45}$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{225}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{32}{75}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{64}{225}$	$\frac{32}{135}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{32}{225}$	$\frac{16}{135}$	$\frac{4}{45}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{32}{45}$												
	二等分者							$\frac{16}{45}$						
	三等分者					$\frac{64}{135}$				$\frac{32}{135}$				
	四等分者				$\frac{8}{15}$			$\frac{16}{45}$			$\frac{8}{45}$			
	五等分者			$\frac{128}{225}$			$\frac{32}{75}$		$\frac{64}{225}$			$\frac{32}{225}$		
	六等分者		$\frac{16}{27}$			$\frac{64}{135}$		$\frac{48}{135}$		$\frac{32}{135}$			$\frac{16}{135}$	
	八等分者	$\frac{28}{45}$		$\frac{24}{45}$				$\frac{16}{45}$			$\frac{8}{45}$			$\frac{4}{45}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

26. 阳左表 1 (五弦)

相对音高	4.42	5.58	6	6.35	6.91	7.93	8.84	10.42	12.35	13.93	16.42	18.35	19.93	22.42
校正值	-.08	+.08		-.15	-.09	-.07	-.16	-.08	-.15	-.07	-.08	-.15	-.07	-.08
借用记谱														
相对波长	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{40}$
徽位编号		十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{3}{5}$												
	二等分者							$\frac{3}{10}$						
	三等分者					$\frac{2}{5}$				$\frac{1}{5}$				
	四等分者				$\frac{9}{20}$			$\frac{6}{20}$			$\frac{3}{20}$			
	五等分者			$\frac{12}{25}$			$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$				$\frac{3}{25}$		
	六等分者		$\frac{1}{2}$			$\frac{4}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{2}{10}$			$\frac{1}{10}$	
	八等分者		$\frac{21}{40}$		$\frac{18}{40}$			$\frac{12}{40}$			$\frac{6}{40}$			$\frac{3}{40}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

27. 阳左表 2.1 (二弦)

相对音高		0.91	2.07	2.49	2.84	3.40	4.42	5.33	6.91	8.84	10.42	12.91	14.84	16.42	18.91
校正值		-0.09	+0.07	-0.01	-0.16	-0.10	-0.08	-0.17	-0.09	-0.16	-0.08	-0.09	-0.16	-0.08	-0.09
借用记谱															
相对波长		$\frac{9}{10}$	$\frac{63}{80}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{80}$
徽位编号			十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{9}{10}$													
	二等分者								$\frac{9}{20}$						
	三等分者						$\frac{3}{5}$				$\frac{3}{10}$				
	四等分者					$\frac{27}{40}$			$\frac{18}{40}$			$\frac{9}{40}$			
	五等分者				$\frac{18}{25}$			$\frac{27}{50}$		$\frac{9}{25}$			$\frac{9}{50}$		
	六等分者			$\frac{3}{4}$			$\frac{12}{20}$		$\frac{9}{20}$		$\frac{6}{20}$			$\frac{3}{20}$	
	八等分者		$\frac{63}{80}$			$\frac{54}{80}$			$\frac{36}{80}$			$\frac{18}{80}$			$\frac{9}{80}$
相对弦长		1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

28. 阳左表 2.2 (七弦)

相对音高	6.91	8.07	8.49	8.84	9.40	10.42	11.33	12.91	14.84	16.42	18.91	20.84	22.42	24.91
校正值	-0.09	+0.07	-0.01	-0.16	-0.10	-0.08	-0.17	-0.09	-0.16	-0.08	-0.09	-0.16	-0.08	-0.09
借用记谱														
相对波长	$\frac{9}{20}$	$\frac{63}{160}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{160}$
徽位编号		十一	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相 对 波 长	散声	$\frac{9}{20}$												
	二等分者							$\frac{9}{40}$						
	三等分者					$\frac{3}{10}$				$\frac{3}{20}$				
	四等分者					$\frac{27}{80}$		$\frac{18}{80}$			$\frac{9}{80}$			
	五等分者				$\frac{9}{25}$		$\frac{27}{100}$		$\frac{9}{50}$			$\frac{9}{100}$		
	六等分者			$\frac{3}{8}$		$\frac{12}{40}$		$\frac{9}{40}$		$\frac{6}{40}$			$\frac{3}{40}$	
	八等分者		$\frac{63}{160}$			$\frac{54}{160}$		$\frac{36}{160}$			$\frac{18}{160}$			$\frac{9}{160}$
相对弦长	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

## 二、对钱乐之三百六十律的清理及补正

在清理《隋书·卷十六·律历志》中记载的钱乐之三百六十律这批数据时，我们运用逻辑表格来展示，共设计三类表格。第一类表格是关于钱乐之三分损益三百六十律的内容；第二类表格是用三倍反生法生 306 律，对钱乐之三百六十律进行补正，完成纯八度内的完全均匀划分；第三类表格是根据钱乐之以十二律名而统领的律部，将三分损益相生三百六十律和三倍反生 306 律整合。读表顺序为：

第一类，以天干序号排列的六张表，每表阅读方法为从左下角开始，从下往上，每行由左至右；

第二类，以地支序号排列的六张表，每表阅读方法为从右上角开始，从上往下，每行由右至左；

第三类，十二部共 53 个表，每页一部，每部表格的排列从左下至左上接右下至右上，这样的排列可以清晰地反映出音律之间的严密逻辑关系。

### 1. 三分损益相生 359 次得三百六十律（钱乐之三百六十律）

以三分损益法生律，每生 52 次得 53 律为一个单元，每 53 次生律产生一个京房微差，生至第 359 次，黄钟与黄钟半律之间被分割为 306 个京房微差和 53 个半份京房微差。以下共有 6 批 53 律，至第 7 批仅有 41 律。

#### 甲，第一批 53 律

每 12 次生律就出现一个古代音差，在生律序号为 12、24、36、48 的律位上，都进行等音转换。从黄钟律出发，生律序号为 0。

校正值	+47	+48	+49	+50	+51		
							
生律序号	48 质末	49 否与	50 形晋	51 夷汗	52 依行		
校正值		+42	+43	+44	+45	+46	
							
生律序号		43 少出	44 分积	45 争南	46 期保	47 物应	
校正值	+35	+36	+37	+38	+39	+40	+41
							
生律序号	36 分动	37 归嘉	38 随期	39 未印	40 形始	41 迟时	42 制时
校正值		+30	+31	+32	+33	+34	
							
生律序号		31 凌阴	32 去南	33 族嘉	34 邻齐	35 内负	
校正值	+23	+24	+25	+26	+27	+28	+29
							
生律序号	24 丙盛	25 安度	26 屈齐	27 归期	28 路时	29 未育	30 离宫
校正值		+19	+20	+21	+22	+22	
							
生律序号		19 分否	20 解形	21 开时	22 闭掩	23 南中	
校正值	+12	+13	+14	+15	+16	+17	+18
							
生律序号	12 执始	13 去灭	14 时息	15 结躬	16 变虞	17 迟内	18 盛变
校正值		+07	+08	+09	+10	+11	
							
生律序号		7 大吕	8 夷则	9 夹钟	10 无射	11 仲吕	
校正值		+01	+02	+03	+04	+05	+06
							
生律序号	0 黄钟	1 林钟	2 太簇	3 南吕	4 姑洗	5 应钟	6 蕤宾

在这个表中,第22号、23号相邻两律出现了相同的校正值,这是由于小数四舍五入的原因。我们依据的是7位小数的较精确的数值,校正值只取两位小数,第三位小数四舍五入。因此有时可能相邻的两个音符会具有相同的校正值,实际上,从七位小数来看,两者是不同。以下情况相同。



## 乙, 第二批 53 律













































当第 53 次生律得到一个京房微差时, 作等音转换。在第 65、77、89、101 次律位上都作等音转换。

校正值	+49	+50	+51	+52	+53		
生律序号	101 僂昧	102 景口	103 辨秩	104 均义	105 少选		
校正值		+44	+45	+46	+47	+48	
生律序号		96 阿衡	97 孔修	98 旭日	99 延年	100 戒彝	
校正值	+37	+38	+39	+40	+41	+42	+43
生律序号	89 生气	90 美音	91 龙跃	92 质随	93 方齐	94 方制	95 瑞通
校正值		+32	+33	+34	+35	+36	
生律序号		84 倡阳	85 阳消	86 粹党	87 轨众	88 硃草	
校正值	+25	+26	+27	+28	+29	+30	+31
生律序号	77 滋萌	78 德均	79 扶弱	80 中德	81 日旅	82 万机	83 安壮
校正值		+20	+21	+22	+23	+24	
生律序号		72 义繁	73 贞克	74 震德	75 降萎	76 离春	
校正值	+14	+15	+15	+16	+17	+18	+19
生律序号	65 握鉴	66 华销	67 达生	68 肥遁	69 攢颖	70 无为	71 宾安
校正值		+09	+10	+11	+12	+13	
生律序号		60 菱幼	61 升商	62 明庶	63 思冲	64 硃明	
校正值	+02	+03	+04	+05	+06	+07	+08
生律序号	53 色育	54 谦侍	55 未知	56 白吕	57 南授	58 分焉	59 南事

从色育出发, 生律序号为 53; 第 66、67 号相邻两律的校正值相同, 是第三位小数四舍五入所致。

## 丙，第三批 53 律

第二批 53 次生律至第 106 次，又高出一个京房微差，作等音转换。在第 118、130、142、154 次律位上都作等音转换。




校正值	+51	+52	+53	+53	+54		
							
生律序号	154 通建	155 曜井	156 东作	157 悦使	158 道从		
校正值		+46	+47	+48	+49	+50	
							
生律序号		149 同云	150 九德	151 晨朝	152 秋深	153 荒落	
校正值	+39	+40	+41	+42	+43	+44	+45
							
生律序号	142 云繁	143 温风	144 勾芒	145 分满	146 物华	147 无休	148 鶉火
校正值		+34	+35	+36	+37	+38	
							
生律序号		137 识沈	138 柔辛	139 四隙	140 大蓄	141 含辉	
校正值	+27	+28	+29	+30	+31	+32	+33
							
生律序号	130 光被	131 无蹇	132 承齐	133 王猷	134 实沈	135 万寿	136 崇明
校正值		+22	+23	+24	+25	+26	
							
生律序号		125 唯微	126 金天	127 乘条	128 藏遼	129 率农	
校正值	+15	+16	+17	+18	+19	+20	+21
							
生律序号	118 持枢	119 朋庆	120 匏奏	121 羸中	122 嘉气	123 而义	124 怀远
校正值		+10	+11	+12	+13	+14	
							
生律序号		113 始贲	114 清爽	115 协倡	116 怀谦	117 启运	
校正值	+04	+05	+06	+07	+08	+09	+09
							
生律序号	106 含徵	107 崇德	108 其已	109 捐秀	110 怀来	111 祖微	112 谧静

从含徵出发，生律序号为 106；第 111、112 号相邻两律校正值相同，

第 156、157 号相邻两律校正值相同，皆为第三位小数四舍五入所致。

#### 丁，第四批 53 律





第三批 53 次生律至第 159 次，又高出一个京房微差，作等音转换。在第 171、183、195、207 次律位上都作等音转换。

校正值	+52	+53	+54	+55	+56		
							
生律序号	207 玄中	208 日焕	209 赞扬	210 亡劳	211 殊敲	—	—
校正值		+47	+48	+49	+50	+51	
							
生律序号		202 承明	203 咸荣	204 生遂	205 野色	206 贞珍	
校正值	+41	+42	+43	+44	+45	+46	+46
							
生律序号	195 郁漶	196 候节	197 调序	198 道心	199 革蕤	200 九野	201 义次
校正值		+36	+37	+38	+39	+40	
							
生律序号		190 纁熙	191 延乙	192 种生	193 高敏	194 屈秩	
校正值	+29	+30	+31	+32	+33	+34	+35
							
生律序号	183 咸亨	184 礼溢	185 动植	186 允塞	187 炎风	188 无疆	189 远眺
校正值		+24	+25	+26	+27	+28	
							
生律序号		178 弃望	179 刘弥	180 芬芳	181 日在	182 有程	
校正值	+17	+18	+19	+20	+21	+22	+23
							
生律序号	171 黄中	172 云布	173 初角	174 晨阴	175 始升	176 姑射	177 声暨
校正值		+12	+13	+14	+15	+16	
							
生律序号		166 大有	167 气精	168 阴赞	169 恭俭	170 景风	
校正值	+05	+06	+07	+08	+09	+10	+11
							
生律序号	159 帝德	160 循道	161 义建	162 敦实	163 考神	164 据始	165 则选

从帝德出发,生律序号为159;第200、201号两律校正值相同,是第三位小数四舍五入所致。

### 戊,第五批 53 律


第四批 53 次生律至第 212 次,又高出一个京房微差,作等音转换。在第 224、236、248、260 次律位上都作等音转换。

校正值	+ .54	+ .55	+ .56	+ .57	+ .58		
							
生律序号	260 玉烛	261 重轮	262 显滞	263 九有	264 杨庭		
校正值		+ .49	+ .50	+ .51	+ .52	+ .53	
							
生律序号		255 善述	256 金惟	257 群分	258 玄月	259 天庭	
校正值	+ .42	+ .43	+ .44	+ .45	+ .46	+ .47	+ .48
							
生律序号	248 升引	249 冀华	250 青雯	251 贞坚	252 茂实	253 八荒	254 高焰
校正值		+ .38	+ .39	+ .39	+ .40	+ .41	
							
生律序号		243 知道	244 和庚	245 恣性	246 下济	247 曜畴	
校正值	+ .31	+ .32	+ .33	+ .34	+ .35	+ .36	+ .37
							
生律序号	236 乃文	237 智深	238 咸擢	239 蔦收	240 首节	241 地久	242 升中
校正值		+ .26	+ .27	+ .28	+ .29	+ .30	
							
生律序号		231 庶几	232 会道	233 散朗	234 旋春	235 南讹	
校正值	+ .19	+ .20	+ .21	+ .22	+ .23	+ .24	+ .25
							
生律序号	224 通圣	225 均任	226 少阳	227 抗节	228 卿云	229 凝晦	230 轨同
校正值		+ .14	+ .15	+ .16	+ .17	+ .18	
							
生律序号		219 坤元	220 阴德	221 风从	222 休老	223 初缓	
校正值	+ .07	+ .08	+ .09	+ .10	+ .11	+ .12	+ .13
							
生律序号	212 广运	213 方壮	214 亭毒	215 素风	216 方显	217 功成	218 布萼

从广运出发,生律序号为212;第244、245号两律校正值相同,是第三位小数四舍五入所致。

### 己,第六批 53 律

第五批 53 次生律至第 265 次,又高出一个京房微差,作等音转换。在第 277、289、301、313 次律位上各作等音转换。
























校正值	+56	+57	+58	+59	+60		
							
生律序号	313 调风	314 财华	315 傲落	316 光贵	317 含贞	—	—
校正值		+51	+52	+53	+54	+55	
							
生律序号		308 休光	309 俾义	310 洁新	311 澄天	312 祚周	
校正值	+44	+45	+46	+47	+48	+49	+50
							
生律序号	301 屯结	302 绣岭	303 结萼	304 蓄止	305 登明	306 亿兆	307 其煌
校正值		+39	+40	+41	+42	+43	
							
生律序号		296 适时	297 靡卉	298 逍遥	299 息肩	300 已气	
校正值	+32	+33	+34	+35	+36	+37	+38
							
生律序号	289 乃圣	290 任肃	291 兼山	292 携轡	293 柔条	294 天长	295 凤翥
校正值		+28	+29	+30	+31	+32	
							
生律序号		284 执义	285 归仁	286 淑气	287 阍藏	288 敬致	
校正值	+21	+22	+23	+24	+25	+26	+27
							
生律序号	277 潜升	278 仰成	279 柔桡	280 威远	281 媚岭	282 动寂	283 海水
校正值		+16	+17	+18	+19	+20	
							
生律序号		272 辅时	273 白藏	274 布政	275 恤农	276 羽物	
校正值	+09	+10	+11	+12	+13	+14	+15
							
生律序号	265 下济	266 阴升	267 条风	268 劲物	269 携角	270 义定	271 满赢

从下济出发，生律序号为 265；第 288、289 号两律校正值相同，是第三位小数四舍五入所致。

### 庚，第七批 41 律

第六批 53 次生律至第 318 次，又高出一个京房微差，作等音转换。在第 330、342、354 次律位上各作等音转换。

说明：按照钱乐之的记述，最后一批三分损益相生 42 律。但是这 42 个律（生律序号为 359）安运，是多余的，钱乐之把它归入应钟一部，而实际上却高于黄钟半律。详见《十二律统领十二个生律群》表 53（41）迟时 $\leftrightarrow$ （0）黄钟半律。

	完 ← ————— → 完						
校正值	+46	+47	+48	+49	+50	+51	
							
生律序号	354 开元	355 物无	356 延敷	357 归藏	358 壮进	359 安运	—
校正值		+41	+42	+43	+44	+45	
							
生律序号		349 权变	350 蕤晋	351 仁威	352 无边	353 清和	
校正值	+34	+35	+36	+37	+38	+39	+40
							
生律序号	342 微阳	343 纯恪	344 止速	345 摇落	346 方结	347 修复	348 朝阳
校正值		+29	+30	+31	+32	+33	
							
生律序号		337 秉强	338 阴倡	339 风驰	340 明牵	341 相趣	
校正值	+23	+24	+25	+26	+26	+27	+28
							
生律序号	330 殷普	331 宽巾	332 商音	333 有截	334 疏道	335 应徵	336 息渗
校正值		+18	+19	+20	+21	+22	
							
生律序号		325 匡弼	326 御叙	327 万化	328 销祥	329 斯奋	
校正值	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17
							
生律序号	318 魁终	319 靡慝	320 湊始	321 酋稔	322 洗陈	323 静谧	324 潜动

从尕终出发,生律序号为 318;第 333、334 号两律校正值相同,是第三位小数四舍五入所致。






















































## 2. 三倍反生法（三倍）得反向 306 律

以三倍反生相生 306 次，得到反方向 306 律，将 306 个京房微差划分为半京甲和半京乙。仍以 53 律为一个单元建立表格，每相生 12 次，出现一个古代音差，作一次等音转换；每相生 53 次，出现一个京房微差，也作一次等音转换。

### 子，第一批 52 律

第一批 52 律，加上出发律黄钟半律，共 53 律。但出发律不属于反生所得的范围，故应扣除。

























校正值	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
							
生律序号	-6 反生蕤宾	-5 反生大吕	-4 反生夷则	-3 反生夹钟	-2 反生无射	-1 反生仲吕	0 黄钟半律
校正值		-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	
							
生律序号		-11 反生林钟	-10 反生太簇	-9 反生南吕	-8 反生姑洗	-7 反生应钟	
校正值	-0.18	-0.17	-0.16	-0.15	-0.14	-0.13	-0.12
							
生律序号	-18 后敬致	-17 后乃圣	-16 后任肃	-15 后兼山	-14 后搏鹭	-13 后柔条	-12 后天长
校正值		-0.22	-0.22	-0.21	-0.20	-0.19	
							
生律序号		-23 后海水	-22 后执义	-21 后归仁	-20 后淑气	-19 后阍藏	
校正值	-0.29	-0.28	-0.27	-0.26	-0.25	-0.24	-0.23
							
生律序号	-30 后羽物	-29 后潜升	-28 后仰成	-27 后柔桡	-26 后威远	-25 后媚岭	-24 后动寂
校正值		-0.34	-0.33	-0.32	-0.31	-0.30	
							
生律序号		-35 后满羸	-34 后辅时	-33 后白藏	-32 后布政	-31 后恤农	
校正值	-0.41	-0.40	-0.39	-0.38	-0.37	-0.36	-0.35
							
生律序号	-42 后扬庭	-41 后下济	-40 后阴升	-39 后条风	-38 后劲物	-37 后携角	-36 后又定
校正值		-0.46	-0.45	-0.44	-0.43	-0.42	
							
生律序号		-47 后天庭	-46 后玉烛	-45 后重轮	-44 后显滞	-43 后九有	
校正值			-0.51	-0.50	-0.49	-0.48	-0.47
							
生律序号			-52 后高焰	-51 后善述	-50 后金惟	49 后群分	-48 后玄月

每产生一个古代音差,进行一次等音转换。故第-12、-24、-36、-48号各音律作等音转换;所有反向生律所得的音律命名办法有两种:第一,-1至-11,在人们熟知的古代律名之前添加“反生”二字;第二,从-12起以后各律,在京房、钱乐之律名之前添加“后”字。例如,反生

第 53 次所得律（—53 号），根据钱乐之第 253 号律名“八荒”而命名为“后八荒”，两者序号的绝对值相加必为 306。—22、—23 号相邻两律校正值相同，是第三位小数四舍五入所致。

### 丑，第二批 53 律

校正值	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02
							
生律序号	-59 后曜畴	-58 后升引	-57 后冀华	-56 后青要	-55 后贞坚	-54 后茂实	-53 后八荒
校正值		-0.13	-0.12	-0.11	-0.10	-0.09	
							
生律序号		-64 后升中	-63 后知道	-62 后和庚	-61 后恣性	-60 后下济	
校正值	-0.19	-0.18	-0.17	-0.16	-0.15	-0.14	-0.14
							
生律序号	-71 后南讹	-70 后乃文	-69 后智深	-68 后咸濯	-67 后蓐收	-66 后首节	-65 后地久
校正值		-0.24	-0.23	-0.22	-0.21	-0.20	
							
生律序号		-76 后轨同	-75 后庶几	-74 后会道	-73 后散朗	-72 后旋春	
校正值	-0.31	-0.30	-0.29	-0.28	-0.27	-0.26	-0.25
							
生律序号	-83 后初缓	-82 后通圣	-81 后均任	-80 后少阳	-79 后抗节	-78 后卿云	-77 后凝晦
校正值		-0.36	-0.35	-0.34	-0.33	-0.32	
							
生律序号		-88 后布粤	-87 后坤元	-86 后阴德	-85 后风从	-84 后休老	
校正值	-0.43	-0.42	-0.41	-0.40	-0.39	-0.38	-0.37
							
生律序号	-95 后砾蔽	-94 后广运	-93 后方壮	-92 后亭毒	-91 后素风	-90 后方显	-89 后功成
校正值		-0.48	-0.47	-0.46	-0.45	-0.44	
							
生律序号		-100 后贞轸	-99 后玄中	-98 后日焕	-97 后赞扬	-96 后亡劳	
校正值			-0.53	-0.52	-0.51	-0.50	-0.49
							
生律序号			-105 后又次	-104 后承明	-103 后咸臧	-102 后生遂	-101 后野色

每生 53 律，产生一个京房微差，进行一次等音转换。—65、—66 号相邻两律校正值相同，是第三位小数四舍五入所致。

### 寅，第三批 53 律

校正值	-09	-09	-08	-07	-06	-05	-04
							
生律序号	-112后屈铁	-111后郁湮	-110后候节	-109后调序	-108后道心	-107后革萼	-106后九野
校正值		-14	-13	-12	-11	-10	
							
生律序号		-117后远眺	-116后緝熙	-115后延乙	-114后种生	-113后蓄敛	
校正值	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15
							
生律序号	-124后有程	-123后威亨	-122后礼溢	-121后动植	-120后允塞	-119后炎风	-118后无疆
校正值		-26	-25	-24	-23	-22	
							
生律序号		-129后声臂	-128后弃望	-127后刘弥	-126后芬芳	-125后日在	
校正值	-33	-32	-31	-30	-29	-28	-27
							
生律序号	-136后景风	-135后黄中	-134后云布	-133后初角	-132后晨阴	-131后始升	-130后姑射
校正值		-38	-37	-36	-35	-34	
							
生律序号		-141后则选	-140后大有	-139后气精	-138后阴赞	-137后恭俭	
校正值	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39
							
生律序号	-148后道从	-147后帝德	-146后循道	-145后义建	-144后敦实	-143后考神	-142后据始
校正值		-50	-49	-48	-47	-46	
							
生律序号		-153后荒落	-152后通建	-151后曜井	-150后东作	-149后悦使	
校正值			-54	-53	-52	-52	-51
							
生律序号			-158后鹑火	-157后同云	-156后九德	-155后晨朝	-154后秋深

每生 53 律，产生一个京房微差，进行一次等音转换。第一 118、

-130、-142、-154号各律位上产生古代音差而作等音转换。-111、-112号相邻两律校正正值相同，-155、-156号相邻两律校正正值相同，是第三位小数四舍五入所致。

## 卯，第四批 53 律

校正值	-11	-10	-09	-08	-07	-06	-05
生律序号	-165后含辉	-164后云繁	-163后温风	-162后勾芒	-161后分满	-160后物华	-159后无休
校正值		-16	-15	-14	-13	-12	
生律序号		-170后崇明	-169后识沈	-168后柔辛	-167后四隙	-166后大蓄	
校正值	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17
生律序号	-177后率农	-176后光被	-175后无蹇	-174后承齐	-173后王猷	-172后实沈	-171后万寿
校正值		-28	-27	-26	-25	-24	
生律序号		-182后怀远	-181后唯微	-180后金天	-179后乘条	-178后藏遂	
校正值	-35	-34	-33	-32	-31	-30	-29
生律序号	-189后启运	-188后持枢	-187后朋庆	-186后匏奏	-185后羸中	-184后嘉气	-183后而义
校正值		-40	-39	-38	-37	-36	
生律序号		-194后谧静	-193后始赞	-192后清爽	-191后协侣	-190后怀谦	
校正值	-46	-45	-45	-44	-43	-42	-41
生律序号	-201后少选	-200后含徽	-199后崇德	-198后其已	-197后捐秀	-196后怀来	-195后祖微
校正值		-51	-50	-49	-48	-47	
生律序号		-206后戒辨	-205后僂昧	-204后景口	-203后辨秩	-202后均义	
校正值			-56	-55	-54	-53	-52
生律序号			-211后瑞通	-210后阿衡	-209后孔修	-208后旭日	-207后延午

每生 53 律, 产生一个京房微差, 进行一次等音转换。在第一 171、-183、-195、-207 号各律位上因为产生古代音差而作等音转换。-199、-200 号相邻两律校正值相同, 是第三位小数四舍五入所致。


辰, 第五批 53 律

校正值	-0.13	-0.12	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07
生律序号	-218后祿草	-217后生气	-216后美音	-215后龙跃	-214后质随	-213后方齐	-212后方制
校正值		-0.18	-0.17	-0.16	-0.15	-0.14	
生律序号		-223后安壮	-222后侣阳	-221后阳消	-220后幹党	-219后轨众	
校正值	-0.25	-0.24	-0.23	-0.22	-0.21	-0.20	-0.19
生律序号	-230后离春	-229后滋萌	-228后德均	-227后扶弱	-226后中德	-225后日旅	-224后万机
校正值		-0.30	-0.29	-0.28	-0.27	-0.26	
生律序号		-235后寔安	-234后又繁	-233后贞克	-232后震德	-231后降萎	
校正值	-0.37	-0.36	-0.35	-0.34	-0.33	-0.32	-0.31
生律序号	-242后祿明	-241后握釜	-240后华销	-239后达生	-238后肥通	-237后纘颖	-236后无为
校正值		-0.41	-0.40	-0.39	-0.39	-0.38	
生律序号		-247后南事	-246后菱动	-245后升商	-244后明庶	-243后思冲	
校正值	-0.48	-0.47	-0.46	-0.45	-0.44	-0.43	-0.42
生律序号	-254后依行	-253后色育	-252后谦待	-251后未知	-250后白吕	-249后南授	-248后分焉
校正值		-0.53	-0.52	-0.51	-0.50	-0.49	
生律序号		-259后物应	-258后质未	-257后否与	-256后形晋	-255后夷汗	
校正值			-0.58	-0.57	-0.56	-0.55	-0.54
生律序号			-264后制时	-263后少出	-262后分积	-261后争南	-260后期保

每生 53 律, 产生一个京房微差, 进行一次等音转换。第一 224、-236、-248、-260 号各律位上产生一个古代音差, 作等音转换。-

244、-245 号相邻两律音律校正正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

### 已，第六批 42 律

校正正值	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-09
							
生律序号	-271后内负	-270后分动	-269后归嘉	-268后随期	-267后未印	-266后形始	-265后迟时
校正正值		-20	-19	-18	-17	-16	
							
生律序号		-276后离宫	-275后凌阴	-274后去南	-273后族嘉	-272后邻齐	
校正正值	-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21
							
生律序号	-283后南中	-282后丙盛	-281后安度	-280后屈齐	-279后归期	-278后路时	-277后未育
校正正值		-32	-31	-30	-29	-28	
							
生律序号		-288后盛变	-287后分否	-286后解形	-285后开时	-284后闭掩	
校正正值	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32
							
生律序号	-295后仲吕	-294后执始	-293后去灭	-292后时息	-291后结射	-290后变虞	-289后迟内
校正正值		-43	-42	-41	-40	-39	
							
生律序号		-300后蕤宾	-299后大吕	-298后夷则	-297后夹钟	-296后无射	
校正正值		-49	-48	-47	-46	-45	-44
							
生律序号		-306后黄钟	-305后林钟	-304后太簇	-303后南吕	-302后姑洗	-301后应钟

相生 42 律，产生一个京房微差，进行一次等音转换。第一 277、-289、-301 号各律位上都作等音转换。第一 306 律为后黄钟。-288、-289 相邻两律校正正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

## 3. 十二律统领十二个生律群

(1) 黄钟部 表1~5 黄钟一部, 三十四律; 共形成63个“半京”区间。

183	咸亨	$3^{-183} \cdot 2^{290}$	0.2888255
-176	后光被	$3^{176} \cdot 2^{-279}$	0.279599
130	光被	$3^{-130} \cdot 2^{206}$	0.2707503
-229	后滋萌	$3^{229} \cdot 2^{-363}$	0.2615238
77	滋萌	$3^{-77} \cdot 2^{122}$	0.2526751
-282	后丙盛	$3^{282} \cdot 2^{-447}$	0.2434486
24	丙盛	$3^{-24} \cdot 2^{38}$	0.2345999
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表2含13个“半京”(12)执始 $\leftrightarrow$ (24)丙盛/景盛

24	丙盛(景盛)	$3^{-24} \cdot 2^{38}$	0.2345999
330	殷普	$3^{-330} \cdot 2^{523}$	0.2257512
-29	后潜升	$3^{29} \cdot 2^{-46}$	0.2165247
277	潜升	$3^{-277} \cdot 2^{439}$	0.207676
-82	后通圣	$3^{82} \cdot 2^{-130}$	0.1984495
224	通圣	$3^{-224} \cdot 2^{355}$	0.1896008
-135	后黄中	$3^{135} \cdot 2^{-214}$	0.1803743
171	黄中	$3^{-171} \cdot 2^{271}$	0.1715256
-188	后持枢	$3^{188} \cdot 2^{-298}$	0.1622991
118	持枢	$3^{-118} \cdot 2^{187}$	0.1534504
-241	后握筌	$3^{241} \cdot 2^{-382}$	0.1442239
65	握筌	$3^{-65} \cdot 2^{103}$	0.1353752
-294	后执始	$3^{294} \cdot 2^{-466}$	0.1261487
12	执始	$3^{-12} \cdot 2^{19}$	0.1173000
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表1含13个“半京”(0)黄钟 $\leftrightarrow$ (12)执始

12	执始	$3^{-12} \cdot 2^{19}$	0.1173000
318	尅终	$3^{-318} \cdot 2^{504}$	0.1084512
-41	后下济	$3^{41} \cdot 2^{-65}$	0.0992247
265	下济	$3^{-265} \cdot 2^{420}$	0.090376
-94	后广运	$3^{94} \cdot 2^{-149}$	0.0811496
212	广运	$3^{-212} \cdot 2^{336}$	0.0723008
-147	后帝德	$3^{147} \cdot 2^{-233}$	0.0630743
159	帝德	$3^{-159} \cdot 2^{252}$	0.0542256
-200	后含徵	$3^{200} \cdot 2^{-317}$	0.0449991
106	含徵	$3^{-106} \cdot 2^{168}$	0.0361504
-253	后色育	$3^{253} \cdot 2^{-401}$	0.0269239
53	色育(包育)	$3^{-53} \cdot 2^{84}$	0.0180752
-306	后黄钟	$3^{306} \cdot 2^{-485}$	0.0088487
0	黄钟	$3^0 \cdot 2^0$	0
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表5含11个“半京”(48)质末 $\leftrightarrow$ (7)大吕

7	大吕	$3^{-7} \cdot 2^{11}$	0.5684250
313	调风	$3^{-313} \cdot 2^{496}$	0.5595757
-46	后玉烛	$3^{46} \cdot 2^{-73}$	0.5503492
260	玉烛	$3^{-260} \cdot 2^{412}$	0.5415005
-99	后玄中	$3^{99} \cdot 2^{-157}$	0.532274
207	玄中	$3^{-207} \cdot 2^{328}$	0.5234253
-152	后速建	$3^{152} \cdot 2^{-241}$	0.5141988
154	速建	$3^{-154} \cdot 2^{244}$	0.5053501
-205	后僂昧	$3^{205} \cdot 2^{-325}$	0.4961236
101	僂昧	$3^{-101} \cdot 2^{160}$	0.4872749
-258	后质末	$3^{258} \cdot 2^{-409}$	0.4780484
48	质末	$3^{-48} \cdot 2^{76}$	0.4691997
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表4含13个“半京”(36)分动 $\leftrightarrow$ (48)质末

48	质末	$3^{-48} \cdot 2^{76}$	0.4691997
354	开元	$3^{-354} \cdot 2^{561}$	0.460351
-5	反生大吕	$3^5 \cdot 2^{-8}$	0.451125
301	屯结	$3^{-301} \cdot 2^{477}$	0.4422758
-58	后升引	$3^{58} \cdot 2^{-92}$	0.4330493
248	升引	$3^{-248} \cdot 2^{393}$	0.4242006
-111	后郁湮	$3^{111} \cdot 2^{-176}$	0.4149741
195	郁湮	$3^{-195} \cdot 2^{309}$	0.4061254
-164	后云繁	$3^{164} \cdot 2^{-260}$	0.3968989
142	云繁	$3^{-142} \cdot 2^{225}$	0.3880502
-217	后生气	$3^{217} \cdot 2^{-344}$	0.3788237
89	生气	$3^{-89} \cdot 2^{141}$	0.369975
-270	后分动	$3^{270} \cdot 2^{-428}$	0.3607485
36	分动	$3^{-36} \cdot 2^{57}$	0.3518998
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表3含13个“半京”(24)丙盛/景盛 $\leftrightarrow$ (36)分动

36	分动	$3^{-36} \cdot 2^{57}$	0.3518998
342	微阳	$3^{-342} \cdot 2^{542}$	0.3430511
-17	后乃圣	$3^{17} \cdot 2^{-27}$	0.3338246
289	乃圣	$3^{-289} \cdot 2^{458}$	0.3249759
-70	后乃文	$3^{70} \cdot 2^{-111}$	0.3157494
236	乃文	$3^{-236} \cdot 2^{374}$	0.3069007
-123	后咸亨	$3^{123} \cdot 2^{-195}$	0.2976742

(2)大吕部 表6~9 大吕一部,二十七律;共形成50个“半京”区间。

表7含13个“半京”(19)分否↔(31)凌阴

31	凌阴	$3^{-31} \cdot 2^{49}$	0.8030251
337	秉强	$3^{-337} \cdot 2^{534}$	0.7941762
-22	后执义	$3^{22} \cdot 2^{-35}$	0.7849497
284	执义	$3^{-284} \cdot 2^{450}$	0.776101
-75	后庶儿	$3^{75} \cdot 2^{-119}$	0.7668745
231	庶儿	$3^{-231} \cdot 2^{366}$	0.7580258
-128	后弃望	$3^{128} \cdot 2^{-203}$	0.7487993
178	弃望	$3^{-178} \cdot 2^{282}$	0.7399506
-181	后唯微	$3^{181} \cdot 2^{-287}$	0.7307241
125	唯微	$3^{-125} \cdot 2^{198}$	0.7218754
-234	后又繁	$3^{234} \cdot 2^{-371}$	0.7126189
72	又繁	$3^{-72} \cdot 2^{114}$	0.7038032
-287	后分否	$3^{287} \cdot 2^{-455}$	0.6945737
19	分否	$3^{-19} \cdot 2^{-30}$	0.6857250
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表9含11个“半京”(43)少出↔(2)太簇

2	太簇	$3^{-2} \cdot 2^3$	1.0195500
308	休光	$3^{-308} \cdot 2^{488}$	1.0107011
-51	后善述	$3^{51} \cdot 2^{-81}$	1.0014736
255	善述	$3^{-255} \cdot 2^{404}$	0.9926259
-104	后承明	$3^{104} \cdot 2^{-165}$	0.9833984
202	承明	$3^{-202} \cdot 2^{320}$	0.9745507
-157	后同云	$3^{157} \cdot 2^{-249}$	0.9653232
149	同云	$3^{-149} \cdot 2^{236}$	0.9564755
-210	后阿衡	$3^{210} \cdot 2^{-333}$	0.947248
96	阿衡	$3^{-96} \cdot 2^{152}$	0.9384003
-263	后少出	$3^{263} \cdot 2^{-417}$	0.9291739
43	少出	$3^{-43} \cdot 2^{68}$	0.9203251
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表6含13个“半京”(7)大吕↔(19)分否

19	分否	$3^{-19} \cdot 2^{-30}$	0.6857250
325	匡弼	$3^{-325} \cdot 2^{515}$	0.6768762
-34	后辅时	$3^{34} \cdot 2^{-54}$	0.6676497
272	辅时	$3^{-272} \cdot 2^{431}$	0.658801
-87	后坤元	$3^{87} \cdot 2^{-138}$	0.6495745
219	坤元	$3^{-219} \cdot 2^{347}$	0.6407258
-140	后大有	$3^{140} \cdot 2^{-222}$	0.6314993
166	大有	$3^{-166} \cdot 2^{263}$	0.6226506
-193	后始贲	$3^{193} \cdot 2^{-306}$	0.6134241
113	始贲	$3^{-113} \cdot 2^{179}$	0.6045754
-246	后菱动	$3^{246} \cdot 2^{-390}$	0.5953489
60	菱动	$3^{-60} \cdot 2^{95}$	0.5865002
-299	后大吕	$3^{299} \cdot 2^{-474}$	0.5772737
7	大吕	$3^{-7} \cdot 2^{11}$	0.5684250
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表8含13个“半京”(31)凌阴↔(43)少出

43	少出	$3^{-43} \cdot 2^{68}$	0.9203251
349	权变	$3^{-349} \cdot 2^{553}$	0.9114763
-10	反生太簇	$3^{10} \cdot 2^{-16}$	0.902250
296	适时	$3^{-296} \cdot 2^{469}$	0.8934011
-63	后知道	$3^{63} \cdot 2^{-100}$	0.8841746
243	知道	$3^{-243} \cdot 2^{385}$	0.8753259
-116	后缉熙	$3^{116} \cdot 2^{-184}$	0.8660994
190	缉熙	$3^{-190} \cdot 2^{301}$	0.8572507
-169	后识沈	$3^{169} \cdot 2^{-268}$	0.8480242
137	识沈	$3^{-137} \cdot 2^{217}$	0.8391755
-222	后倡阳	$3^{222} \cdot 2^{-352}$	0.829949
84	倡阳	$3^{-84} \cdot 2^{133}$	0.821100
-275	后凌阴	$3^{275} \cdot 2^{-436}$	0.8118738
31	凌阴	$3^{-31} \cdot 2^{49}$	0.8030251
生律编号	律名	相对波长	相对音高



(3)太簇部 表 10~14 太簇一部,三十四律;共形成 63 个“半京”区间。

185	动植	$3^{-185} \cdot 2^{293}$	1.3083756
-174	后承齐	$3^{174} \cdot 2^{-276}$	1.2991491
132	承齐	$3^{-132} \cdot 2^{209}$	1.2903004
-227	后扶弱	$3^{227} \cdot 2^{-350}$	1.2810739
79	扶弱	$3^{-79} \cdot 2^{125}$	1.2722252
-280	后屈齐	$3^{280} \cdot 2^{-444}$	1.2629987
26	屈齐	$3^{-26} \cdot 2^{41}$	1.254150
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 11 含 13 个“半京”(14)时息↔(26)屈齐

26	屈齐	$3^{-26} \cdot 2^{41}$	1.254150
332	商音	$3^{-332} \cdot 2^{526}$	1.24530
-27	后柔桡	$3^{27} \cdot 2^{-43}$	1.2360727
279	柔桡	$3^{-279} \cdot 2^{442}$	1.2272260
-80	后少阳	$3^{80} \cdot 2^{-127}$	1.2179975
226	少阳	$3^{-226} \cdot 2^{358}$	1.2091509
-133	后初角	$3^{133} \cdot 2^{-211}$	1.1999223
173	初角	$3^{-173} \cdot 2^{274}$	1.1910757
-186	后匏奏	$3^{186} \cdot 2^{-295}$	1.1818471
120	匏奏	$3^{-120} \cdot 2^{190}$	1.1730005
-239	后达生	$3^{239} \cdot 2^{-379}$	1.1637719
67	达生	$3^{-67} \cdot 2^{106}$	1.1549253
-292	后时息	$3^{292} \cdot 2^{-463}$	1.1456967
14	时息	$3^{-14} \cdot 2^{22}$	1.1368500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 10 含 13 个“半京”(2)太簇↔(14)时息

14	时息	$3^{-14} \cdot 2^{22}$	1.1368500
320	凑始	$3^{-320} \cdot 2^{507}$	1.128
-39	后条风	$3^{39} \cdot 2^{-62}$	1.1187747
267	条风	$3^{-267} \cdot 2^{423}$	1.109926
-92	后亭毒	$3^{92} \cdot 2^{-146}$	1.1006995
214	亭毒	$3^{-214} \cdot 2^{339}$	1.0918508
-145	后义建	$3^{145} \cdot 2^{-230}$	1.0826243
161	义建	$3^{-161} \cdot 2^{255}$	1.0737756
-198	后其已	$3^{198} \cdot 2^{-314}$	1.0645491
108	其已	$3^{-108} \cdot 2^{171}$	1.0557004
-251	后未知	$3^{251} \cdot 2^{-398}$	1.0464739
55	未知	$3^{-55} \cdot 2^{87}$	1.0376252
-304	后太簇	$3^{304} \cdot 2^{-482}$	1.0283987
2	太簇	$3^{-2} \cdot 2^3$	1.0195500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 14 含 11 个“半京”(50)形晋/刑晋↔(9)夹钟

9	夹钟	$3^{-9} \cdot 2^{14}$	1.5879750
315	椒落	$3^{-315} \cdot 2^{499}$	1.579126
-44	后显滞	$3^{44} \cdot 2^{-70}$	1.5698995
262	显滞	$3^{-262} \cdot 2^{415}$	1.5610508
-97	后赞扬	$3^{97} \cdot 2^{-154}$	1.5518243
209	赞扬	$3^{-209} \cdot 2^{331}$	1.5429756
-150	后东作	$3^{150} \cdot 2^{-238}$	1.5337491
156	东作	$3^{-156} \cdot 2^{247}$	1.5249004
-203	后辨秩	$3^{203} \cdot 2^{-322}$	1.5156739
103	辨秩	$3^{-103} \cdot 2^{163}$	1.5068252
-256	后形晋	$3^{256} \cdot 2^{-406}$	1.4975987
50	形晋/刑晋	$3^{50} \cdot 2^{-79}$	1.488750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 13 含 13 个“半京”(38)随期↔(50)形晋/刑晋

50	形晋/刑晋	$3^{-50} \cdot 2^{79}$	1.488750
356	延敷	$3^{-356} \cdot 2^{564}$	1.4799012
-3	反生夹钟	$3^3 \cdot 2^{-5}$	1.4706750
303	结萼	$3^{-303} \cdot 2^{480}$	1.461826
-56	后青要	$3^{56} \cdot 2^{-89}$	1.4525973
250	青要	$3^{-250} \cdot 2^{396}$	1.4437508
-109	后调序	$3^{109} \cdot 2^{-173}$	1.4345221
197	调序	$3^{-197} \cdot 2^{312}$	1.4256756
-162	后勾芒	$3^{162} \cdot 2^{-257}$	1.4164469
144	勾芒	$3^{-144} \cdot 2^{228}$	1.4076004
-215	后龙跃	$3^{215} \cdot 2^{-341}$	1.3983717
91	龙跃	$3^{-91} \cdot 2^{144}$	1.3895252
-268	后随期	$3^{268} \cdot 2^{-425}$	1.3802965
38	随期	$3^{-38} \cdot 2^{60}$	1.371450
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 12 含 13 个“半京”(26)屈齐↔(38)随期

38	随期	$3^{-38} \cdot 2^{60}$	1.371450
344	止速	$3^{-344} \cdot 2^{545}$	1.3626012
-15	后兼山	$3^{15} \cdot 2^{-24}$	1.3533747
291	兼山	$3^{-291} \cdot 2^{461}$	1.344526
-68	后咸擢	$3^{68} \cdot 2^{-108}$	1.3352995
238	咸擢	$3^{-238} \cdot 2^{377}$	1.3264508
-121	后动植	$3^{121} \cdot 2^{-192}$	1.3172243

(4)夹钟部 表 15~18 夹钟一部,二十七律;共形成 50 个“半京”区间。

表 16 含 13 个“半京”(21)开时 $\leftrightarrow$ (33)族嘉/佚喜 表 18 含 11 个“半京”(45)争南 $\leftrightarrow$ (4)姑洗

33	族嘉/佚喜	$3^{-33} \cdot 2^{52}$	1.822575
339	风驰	$3^{-339} \cdot 2^{537}$	1.8137263
-20	后淑气	$3^{20} \cdot 2^{-32}$	1.8044998
286	淑气	$3^{-286} \cdot 2^{453}$	1.7956511
-73	后散朗	$3^{73} \cdot 2^{-116}$	1.7864246
233	散朗	$3^{-233} \cdot 2^{369}$	1.7775759
-126	后芬芳	$3^{126} \cdot 2^{-200}$	1.7683494
180	芬芳	$3^{-180} \cdot 2^{285}$	1.759007
-179	后乘条	$3^{179} \cdot 2^{-284}$	1.7502742
127	乘条	$3^{-127} \cdot 2^{201}$	1.7414255
-232	后震德	$3^{232} \cdot 2^{-368}$	1.732199
74	震德	$3^{-74} \cdot 2^{117}$	1.7233503
-285	后开时	$3^{285} \cdot 2^{-452}$	1.7141238
21	开时	$3^{-21} \cdot 2^{33}$	1.7052751
生律编号	律名	相对波长	相对音高

4	姑洗	$3^{-4} \cdot 2^5$	2.0391000
310	洁新	$3^{-310} \cdot 2^{491}$	2.0302512
-49	后群分	$3^{49} \cdot 2^{-78}$	2.0210247
257	群分	$3^{-257} \cdot 2^{407}$	2.012176
-102	后生遂	$3^{102} \cdot 2^{-162}$	2.0029495
204	生遂	$3^{-204} \cdot 2^{323}$	1.9941008
-155	后晨朝	$3^{155} \cdot 2^{-246}$	1.9848743
151	晨朝	$3^{-151} \cdot 2^{239}$	1.9760256
-208	后旭旦	$3^{208} \cdot 2^{-330}$	1.9667991
98	旭旦	$3^{-98} \cdot 2^{155}$	1.9579504
-261	后争南	$3^{261} \cdot 2^{-414}$	1.9487239
45	争南	$3^{-45} \cdot 2^{71}$	1.9398752
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 15 含 13 个“半京”(9)夹钟 $\leftrightarrow$ (21)开时

21	开时	$3^{-21} \cdot 2^{33}$	1.7052751
327	万化	$3^{-327} \cdot 2^{518}$	1.6964262
-32	后布政	$3^{32} \cdot 2^{-51}$	1.6872064
274	布政	$3^{-274} \cdot 2^{434}$	1.678351
-85	后风从	$3^{85} \cdot 2^{-135}$	1.669142
221	风从	$3^{-221} \cdot 2^{350}$	1.6602758
-138	后阴赞	$3^{138} \cdot 2^{-219}$	1.6510776
168	阴赞	$3^{-168} \cdot 2^{266}$	1.642006
-191	后协倡	$3^{191} \cdot 2^{-303}$	1.6330132
115	协倡	$3^{-115} \cdot 2^{182}$	1.6241254
-244	后明庶	$3^{244} \cdot 2^{-387}$	1.6149488
62	明庶	$3^{-62} \cdot 2^{98}$	1.6060502
-297	后夹钟	$3^{297} \cdot 2^{-471}$	1.5968844
9	夹钟	$3^{-9} \cdot 2^{14}$	1.5879750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 17 含 13 个“半京”(33)族嘉/佚喜 $\leftrightarrow$ (45)争南

45	争南	$3^{-45} \cdot 2^{71}$	1.9398752
351	仁威	$3^{-351} \cdot 2^{556}$	1.9310262
-8	反生姑洗	$3^8 \cdot 2^{-13}$	1.9217997
298	逍遥	$3^{-298} \cdot 2^{472}$	1.912951
-61	后恣性	$3^{61} \cdot 2^{-97}$	1.9037245
245	恣性	$3^{-245} \cdot 2^{388}$	1.8948758
-114	后种生	$3^{114} \cdot 2^{-181}$	1.8856493
192	种生	$3^{-192} \cdot 2^{304}$	1.8768006
-167	后四隙	$3^{167} \cdot 2^{-265}$	1.8675741
139	四隙	$3^{-139} \cdot 2^{220}$	1.8587254
-220	后幹党	$3^{220} \cdot 2^{-349}$	1.8494989
86	幹党	$3^{-86} \cdot 2^{136}$	1.8406502
-273	后族嘉	$3^{273} \cdot 2^{-433}$	1.8314237
33	族嘉/佚喜	$3^{-33} \cdot 2^{-52}$	1.822575
生律编号	律名	相对波长	相对音高

(5) 姑洗部 表 19~23 姑洗一部,三十四律;共形成 63 个“半京”区间。

187	炎风	$3^{-187} \cdot 2^{296}$	2.3279257
-172	后实沈	$3^{172} \cdot 2^{-273}$	2.3186992
134	实沈	$3^{-134} \cdot 2^{212}$	2.3098505
-225	后日旅	$3^{225} \cdot 2^{-357}$	2.300624
81	日旅	$3^{-81} \cdot 2^{128}$	2.2917753
-278	后路时	$3^{278} \cdot 2^{-441}$	2.2825488
28	路时	$3^{-28} \cdot 2^{44}$	2.2737001
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 20 含 13 个“半京”(16)变虞↔(28)路时

28	路时	$3^{-28} \cdot 2^{44}$	2.2737001
334	疏道	$3^{-334} \cdot 2^{529}$	2.2648512
-25	后媚岭	$3^{25} \cdot 2^{-40}$	2.25563
281	媚岭	$3^{-281} \cdot 2^{445}$	2.246776
-78	后卿云	$3^{78} \cdot 2^{-124}$	2.2375656
228	卿云	$3^{-228} \cdot 2^{361}$	2.2287008
-131	后始升	$3^{131} \cdot 2^{-208}$	2.2195012
175	始升	$3^{-175} \cdot 2^{277}$	2.2106256
-184	后嘉气	$3^{184} \cdot 2^{-292}$	2.2014368
122	嘉气	$3^{-122} \cdot 2^{193}$	2.1925504
-237	后擢颖	$3^{237} \cdot 2^{-376}$	2.1833724
69	擢颖	$3^{-69} \cdot 2^{109}$	2.1744752
-290	后变虞	$3^{290} \cdot 2^{-460}$	2.165308
16	变虞	$3^{-16} \cdot 2^{25}$	2.1564000
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 19 含 13 个“半京”(4)姑洗↔(16)变虞

16	变虞	$3^{-16} \cdot 2^{25}$	2.1564000
322	洗陈	$3^{-322} \cdot 2^{510}$	2.1475512
-37	后携角	$3^{37} \cdot 2^{-59}$	2.1383325
269	携角	$3^{-269} \cdot 2^{426}$	2.129476
-90	后方显	$3^{90} \cdot 2^{-143}$	2.1202495
216	方显	$3^{-216} \cdot 2^{342}$	2.1114008
-143	后考神	$3^{143} \cdot 2^{-227}$	2.1021743
163	考神	$3^{-163} \cdot 2^{258}$	2.0933256
-196	后怀来	$3^{196} \cdot 2^{-311}$	2.0840991
110	怀来	$3^{-110} \cdot 2^{174}$	2.075504
-249	后南授	$3^{249} \cdot 2^{-395}$	2.0660239
57	南授	$3^{-57} \cdot 2^{90}$	2.0571752
-302	后姑洗	$3^{302} \cdot 2^{-479}$	2.0479487
4	姑洗	$3^{-4} \cdot 2^6$	2.0391000
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 23 含 11 个“半京”(52)依行↔(11)仲吕

11	仲吕	$3^{-11} \cdot 2^{17}$	2.6075250
317	含贞	$3^{-317} \cdot 2^{502}$	2.5986762
-42	后扬庭	$3^{42} \cdot 2^{-67}$	2.5894497
264	扬庭	$3^{-264} \cdot 2^{418}$	2.580601
-95	后殊蔽	$3^{95} \cdot 2^{-151}$	2.5713745
211	殊蔽	$3^{-211} \cdot 2^{334}$	2.5625258
-148	后道从	$3^{148} \cdot 2^{-235}$	2.5532993
158	道从	$3^{-158} \cdot 2^{250}$	2.5444506
-201	后少选	$3^{201} \cdot 2^{-319}$	2.5352241
105	少选	$3^{-105} \cdot 2^{166}$	2.5263754
-254	后依行	$3^{254} \cdot 2^{-403}$	2.5171489
52	依行	$3^{-52} \cdot 2^{82}$	2.5083002
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 22 含 13 个“半京”(40)形始/刑始↔(52)依行

52	依行	$3^{-52} \cdot 2^{82}$	2.5083002
358	壮进	$3^{-358} \cdot 2^{567}$	2.4994514
-1	反生仲吕	$3^1 \cdot 2^{-2}$	2.490225
305	登明	$3^{-305} \cdot 2^{483}$	2.4813762
-54	后茂实	$3^{54} \cdot 2^{-86}$	2.4721497
252	茂实	$3^{-252} \cdot 2^{399}$	2.463301
-107	后革蕤	$3^{107} \cdot 2^{-170}$	2.4540745
199	革蕤	$3^{-199} \cdot 2^{315}$	2.4452258
-160	后物华	$3^{160} \cdot 2^{-254}$	2.4359993
146	物华	$3^{-146} \cdot 2^{231}$	2.4271506
-213	后方齐	$3^{213} \cdot 2^{-338}$	2.4179241
93	方齐	$3^{-93} \cdot 2^{147}$	2.4090754
-266	后形始	$3^{266} \cdot 2^{-422}$	2.3998489
40	形始/刑始	$3^{-40} \cdot 2^{63}$	2.3910002
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 21 含 13 个“半京”(28)路时↔(40)形始/刑始

40	形始/刑始	$3^{-40} \cdot 2^{63}$	2.3910002
346	方结	$3^{-346} \cdot 2^{548}$	2.3821513
-13	后柔条	$3^{13} \cdot 2^{-21}$	2.3729248
293	柔条	$3^{-293} \cdot 2^{464}$	2.3640761
-66	后首节	$3^{66} \cdot 2^{-105}$	2.3548496
240	首节	$3^{-240} \cdot 2^{380}$	2.3460009
-119	后炎风	$3^{119} \cdot 2^{-189}$	2.3367744

(6)仲吕部 表 24~27 仲吕一部,二十七律;共形成 50 个“半京”区间。

表 25 含 13 个“半京”(23)南中 $\leftrightarrow$ (35)内负/内贞 表 27 含 11 个“半京”(47)物应 $\leftrightarrow$ (6)蕤宾

35	内负/内贞	$3^{-35} \cdot 2^{55}$	2.842125
341	相趣	$3^{-341} \cdot 2^{540}$	2.8332763
-18	后敬致	$3^{18} \cdot 2^{-29}$	2.8240498
288	敬致	$3^{-288} \cdot 2^{456}$	2.8152011
-71	后南讹	$3^{71} \cdot 2^{-113}$	2.8059746
235	南讹	$3^{-235} \cdot 2^{372}$	2.7971259
-124	后有程	$3^{124} \cdot 2^{-197}$	2.7878994
182	有程	$3^{-182} \cdot 2^{288}$	2.7790507
-177	后率农	$3^{177} \cdot 2^{-281}$	2.7698242
129	率农	$3^{-129} \cdot 2^{204}$	2.7609755
-230	后离春	$3^{230} \cdot 2^{-365}$	2.751749
76	离春	$3^{-76} \cdot 2^{120}$	2.7429003
-283	后南中	$3^{283} \cdot 2^{-449}$	2.7336738
23	南中	$3^{-23} \cdot 2^{36}$	2.7248251
生律编号	律名	相对波长	相对音高

6	蕤宾	$3^{-6} \cdot 2^9$	3.0586500
312	祚周	$3^{-312} \cdot 2^{494}$	3.0498012
-47	后天庭	$3^{47} \cdot 2^{-75}$	3.0405747
259	天庭	$3^{-259} \cdot 2^{410}$	3.031726
-100	后贞轸	$3^{100} \cdot 2^{-159}$	3.0224995
206	贞轸	$3^{-206} \cdot 2^{326}$	3.0136508
-153	后荒落	$3^{153} \cdot 2^{-243}$	3.0044243
153	荒落	$3^{-153} \cdot 2^{242}$	2.9955756
-206	后戒辨	$3^{206} \cdot 2^{-327}$	2.9863491
100	戒辨	$3^{-100} \cdot 2^{158}$	2.9775004
-259	后物应	$3^{259} \cdot 2^{-411}$	2.9682739
47	物应	$3^{-47} \cdot 2^{74}$	2.9594252
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 24 含 13 个“半京”(11)仲吕 $\leftrightarrow$ (23)南中

23	南中	$3^{-23} \cdot 2^{36}$	2.7248251
329	斯奋	$3^{-329} \cdot 2^{521}$	2.7159762
-30	后羽物	$3^{30} \cdot 2^{-48}$	2.7067497
276	羽物	$3^{-276} \cdot 2^{437}$	2.697901
-83	后初缓	$3^{83} \cdot 2^{-132}$	2.6886745
223	初缓	$3^{-223} \cdot 2^{353}$	2.6798258
-136	后景风	$3^{136} \cdot 2^{-216}$	2.6705993
170	景风	$3^{-170} \cdot 2^{269}$	2.6617506
-189	后启运	$3^{189} \cdot 2^{-300}$	2.6525241
117	启运	$3^{-117} \cdot 2^{185}$	2.6436754
-242	后殊明	$3^{242} \cdot 2^{-384}$	2.6344489
64	殊明	$3^{-64} \cdot 2^{101}$	2.6256002
-295	后仲吕	$3^{295} \cdot 2^{-468}$	2.6163737
11	仲吕	$3^{-11} \cdot 2^{17}$	2.6075250
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 26 含 13 个“半京”(35)内负/内贞 $\leftrightarrow$ (47)物应

47	物应	$3^{-47} \cdot 2^{74}$	2.9594252
353	清和	$3^{-353} \cdot 2^{559}$	2.9505762
-6	反生蕤宾	$3^6 \cdot 2^{-10}$	2.94135
300	巳气	$3^{-300} \cdot 2^{475}$	2.932501
-59	后曜畴	$3^{59} \cdot 2^{-94}$	2.9232747
247	曜畴	$3^{-247} \cdot 2^{391}$	2.9144258
-112	后屈铁	$3^{112} \cdot 2^{-178}$	2.9072297
194	屈铁	$3^{-194} \cdot 2^{307}$	2.8963506
-165	后含辉	$3^{165} \cdot 2^{-262}$	2.8884777
141	含辉	$3^{-141} \cdot 2^{223}$	2.8782754
-218	后殊草	$3^{218} \cdot 2^{-346}$	2.8697257
88	殊草	$3^{-88} \cdot 2^{139}$	2.8602002
-271	后内负	$3^{271} \cdot 2^{-430}$	2.8509737
35	内负/内贞	$3^{-35} \cdot 2^{55}$	2.842125
生律编号	律名	相对波长	相对音高

(7)蕤宾部 表 28~31 蕤宾一部,二十七律;共形成 50 个“半京”区间。

表 29 含 13 个“半京”(18)盛变↔(30)离宫/离躬 表 31 含 11 个“半京”(42)制时↔(1)林钟

30	离宫/离躬	$3^{-30} \cdot 2^{47}$	3.293250
336	息渗	$3^{-336} \cdot 2^{532}$	3.2844012
-23	后海水	$3^{23} \cdot 2^{-37}$	3.2751749
283	海水	$3^{-283} \cdot 2^{448}$	3.266326
-76	后轨同	$3^{76} \cdot 2^{-121}$	3.2570995
230	轨同	$3^{-230} \cdot 2^{364}$	3.2482508
-129	后声暨	$3^{129} \cdot 2^{-205}$	3.2390243
177	声暨	$3^{-177} \cdot 2^{280}$	3.2301756
-182	后怀远	$3^{182} \cdot 2^{-289}$	3.2209498
124	怀远	$3^{-124} \cdot 2^{196}$	3.2121004
-235	后宾安	$3^{235} \cdot 2^{-373}$	3.2028739
71	宾安	$3^{-71} \cdot 2^{112}$	3.1940252
-288	后盛变	$3^{288} \cdot 2^{-457}$	3.1847987
18	盛变	$3^{-18} \cdot 2^{28}$	3.1759500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

1	林钟	$3^{-1} \cdot 2^1$	3.5097750
307	其焯	$3^{-307} \cdot 2^{486}$	3.500926
-52	后高焰	$3^{52} \cdot 2^{-83}$	3.4916998
254	高焰	$3^{-254} \cdot 2^{402}$	3.4828508
-105	后又次	$3^{105} \cdot 2^{-167}$	3.4736243
201	又次	$3^{-201} \cdot 2^{318}$	3.4647756
-158	后鹑火	$3^{158} \cdot 2^{-251}$	3.4555491
148	鹑火	$3^{-148} \cdot 2^{234}$	3.4467004
-211	后瑞通	$3^{211} \cdot 2^{-335}$	3.4374739
95	瑞通	$3^{-95} \cdot 2^{150}$	3.4286252
-264	后制时	$3^{264} \cdot 2^{-419}$	3.4193987
42	制时	$3^{-42} \cdot 2^{66}$	3.4105500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 28 含 13 个“半京”(6)蕤宾↔(18)盛变

18	盛变	$3^{-18} \cdot 2^{28}$	3.1759500
324	潜动	$3^{-324} \cdot 2^{513}$	3.1671012
-35	后满羸	$3^{35} \cdot 2^{-56}$	3.1578747
271	满羸	$3^{-271} \cdot 2^{429}$	3.149026
-88	后布萼	$3^{88} \cdot 2^{-140}$	3.1397995
218	布萼	$3^{-218} \cdot 2^{345}$	3.1309508
-141	后则选	$3^{141} \cdot 2^{-224}$	3.1217243
165	则选	$3^{-165} \cdot 2^{261}$	3.1128756
-194	后谧静	$3^{194} \cdot 2^{-308}$	3.1036491
112	谧静	$3^{-112} \cdot 2^{177}$	3.0948004
-247	后南事	$3^{247} \cdot 2^{-392}$	3.0855574
59	南事	$3^{-59} \cdot 2^{93}$	3.0767252
-300	后蕤宾	$3^{300} \cdot 2^{-476}$	3.0674987
6	蕤宾	$3^{-6} \cdot 2^9$	3.0586500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 30 含 13 个“半京”(30)离宫/离躬↔(42)制时

42	制时	$3^{-42} \cdot 2^{66}$	3.4105500
348	朝阳	$3^{-348} \cdot 2^{551}$	3.4017012
-11	反生林钟	$3^{11} \cdot 2^{-18}$	3.392475
295	凤翥	$3^{-295} \cdot 2^{467}$	3.383626
-64	后升中	$3^{64} \cdot 2^{-102}$	3.3743995
242	升中	$3^{-242} \cdot 2^{383}$	3.3655508
-117	后远眺	$3^{117} \cdot 2^{-186}$	3.3563243
189	远眺	$3^{-189} \cdot 2^{299}$	3.3474756
-170	后崇明	$3^{170} \cdot 2^{-270}$	3.3382491
136	崇明	$3^{-136} \cdot 2^{215}$	3.3294004
-223	后安壮	$3^{223} \cdot 2^{-354}$	3.3201739
83	安壮	$3^{-83} \cdot 2^{131}$	3.3113252
-276	后离宫	$3^{276} \cdot 2^{-438}$	3.3020987
30	离宫/离躬	$3^{-30} \cdot 2^{47}$	3.293250
生律编号	律名	相对波长	相对音高

(8)林钟部 表 32~36 林钟一部,三十四律;共形成 63 个“半京”区间。

184	礼溢	$3^{-184} \cdot 2^{291}$	3.7986007
-175	后无蹇	$3^{175} \cdot 2^{-278}$	3.7893742
131	无蹇	$3^{-131} \cdot 2^{207}$	3.7805255
-228	后德均	$3^{228} \cdot 2^{-362}$	3.771299
78	德均	$3^{-78} \cdot 2^{123}$	3.7624503
-281	后安度	$3^{281} \cdot 2^{-446}$	3.7532238
25	安度	$3^{-25} \cdot 2^{39}$	3.7443751
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 33 含 13 个“半京”(13)去灭 $\leftrightarrow$ (25)安度

25	安度	$3^{-25} \cdot 2^{39}$	3.7443751
331	宽中	$3^{-331} \cdot 2^{524}$	3.7355262
-28	后仰成	$3^{28} \cdot 2^{-45}$	3.7262997
278	仰成	$3^{-278} \cdot 2^{440}$	3.717451
-81	后均任	$3^{81} \cdot 2^{-129}$	3.7082245
225	均任	$3^{-225} \cdot 2^{356}$	3.6993758
-134	后云布	$3^{134} \cdot 2^{-213}$	3.6901493
172	云布	$3^{-172} \cdot 2^{272}$	3.6813006
-187	后朋庆	$3^{187} \cdot 2^{-297}$	3.6720741
119	朋庆	$3^{-119} \cdot 2^{188}$	3.6632254
-240	后华销	$3^{240} \cdot 2^{-381}$	3.6539989
66	华销	$3^{-66} \cdot 2^{104}$	3.6451502
-293	后去灭	$3^{293} \cdot 2^{-465}$	3.6359237
13	去灭	$3^{-13} \cdot 2^{20}$	3.6270750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 32 含 13 个“半京”(1)林钟 $\leftrightarrow$ (13)去灭

13	去灭	$3^{-13} \cdot 2^{20}$	3.6270750
319	靡愿	$3^{-319} \cdot 2^{505}$	3.6182262
-40	后阴升	$3^{40} \cdot 2^{-64}$	3.6089997
266	阴升	$3^{-266} \cdot 2^{421}$	3.600151
-93	后方壮	$3^{93} \cdot 2^{-148}$	3.5909245
213	方壮	$3^{-213} \cdot 2^{337}$	3.5820758
-146	后循道	$3^{146} \cdot 2^{-232}$	3.5728493
160	循道	$3^{-160} \cdot 2^{253}$	3.5640006
-199	后崇德	$3^{199} \cdot 2^{-316}$	3.5547741
107	崇德	$3^{-107} \cdot 2^{169}$	3.5459254
-252	后谦侍	$3^{252} \cdot 2^{-400}$	3.5366989
54	谦侍	$3^{-54} \cdot 2^{85}$	3.5278502
-305	后林钟	$3^{305} \cdot 2^{-484}$	3.5186237
1	林钟	$3^{-1} \cdot 2^1$	3.5097750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 36 含 11 个“半京”(49)否与 $\leftrightarrow$ (8)夷则

8	夷则	$3^{-8} \cdot 2^{12}$	4.0781984
314	财华	$3^{-314} \cdot 2^{497}$	4.0693512
-45	后重轮	$3^{45} \cdot 2^{-72}$	4.0601247
261	重轮	$3^{-261} \cdot 2^{413}$	4.051276
-98	后日焕	$3^{98} \cdot 2^{-156}$	4.0420495
208	日焕	$3^{-208} \cdot 2^{329}$	4.0332008
-151	后曜井	$3^{151} \cdot 2^{-240}$	4.0239743
155	曜井	$3^{-155} \cdot 2^{245}$	4.0151256
-204	后景口	$3^{204} \cdot 2^{-324}$	4.0058991
102	景口	$3^{-102} \cdot 2^{161}$	3.9970504
-257	后否与	$3^{257} \cdot 2^{-408}$	3.9878239
49	否与	$3^{-49} \cdot 2^{77}$	3.9789752
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 35 含 13 个“半京”(37)归嘉 $\leftrightarrow$ (49)否与

49	否与	$3^{-49} \cdot 2^{77}$	3.9789752
355	物无	$3^{-355} \cdot 2^{562}$	3.9701262
-4	反生夷则	$3^4 \cdot 2^{-7}$	3.9609
302	绣岭	$3^{-302} \cdot 2^{478}$	3.952051
-57	后冀华	$3^{57} \cdot 2^{-91}$	3.9428245
249	冀华	$3^{-249} \cdot 2^{394}$	3.9339758
-110	后候节	$3^{110} \cdot 2^{-175}$	3.9247493
196	候节	$3^{-196} \cdot 2^{310}$	3.9159006
-163	后温风	$3^{163} \cdot 2^{-259}$	3.9066741
143	温风	$3^{-143} \cdot 2^{226}$	3.8978254
-216	后美音	$3^{216} \cdot 2^{-343}$	3.8885989
90	美音	$3^{-90} \cdot 2^{142}$	3.8797502
-269	后归嘉	$3^{269} \cdot 2^{-427}$	3.8705237
37	归嘉	$3^{-37} \cdot 2^{58}$	3.861675
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 34 含 13 个“半京”(25)安度 $\leftrightarrow$ (37)归嘉

37	归嘉	$3^{-37} \cdot 2^{58}$	3.861675
343	纯恪	$3^{-343} \cdot 2^{543}$	3.8528263
-16	后任肃	$3^{16} \cdot 2^{-26}$	3.8435999
290	任肃	$3^{-290} \cdot 2^{459}$	3.8347511
-69	后智深	$3^{69} \cdot 2^{-110}$	3.8255246
237	智深	$3^{-237} \cdot 2^{375}$	3.8166759
-122	后礼溢	$3^{122} \cdot 2^{-194}$	3.8074494

(9)夷则部 表 37~40 夷则一部,二十七律;共形成 50 个“半京”区间。

表 38 含 13 个“半京”(20)解形/鲜刑 $\leftrightarrow$ (32)去南 表 40 含 11 个“半京”(44)分积 $\leftrightarrow$ (3)南吕

32	去南	$3^{-32} \cdot 2^{50}$	4.3128001
338	阴倡	$3^{-338} \cdot 2^{535}$	4.3039512
-21	后归仁	$3^{21} \cdot 2^{-34}$	4.2947249
285	归仁	$3^{-285} \cdot 2^{451}$	4.285876
-74	后会道	$3^{74} \cdot 2^{-118}$	4.2766495
232	会道	$3^{-232} \cdot 2^{367}$	4.2678008
-127	后刘弥	$3^{127} \cdot 2^{-202}$	4.2585743
179	刘弥	$3^{-179} \cdot 2^{283}$	4.2497256
-180	后金天	$3^{180} \cdot 2^{-286}$	4.2404991
126	金天	$3^{-126} \cdot 2^{199}$	4.2316504
-233	后贞克	$3^{233} \cdot 2^{-370}$	4.2224239
73	贞克	$3^{-73} \cdot 2^{115}$	4.2135752
-286	后解形	$3^{286} \cdot 2^{-454}$	4.2043487
20	解形/鲜刑	$3^{-20} \cdot 2^{31}$	4.1955000
生律编号	律名	相对波长	相对音高

3	南吕	$3^{-3} \cdot 2^{24}$	4.5293250
309	俾义	$3^{-309} \cdot 2^{489}$	4.520476
-50	后金惟	$3^{50} \cdot 2^{-80}$	4.5112495
256	金惟	$3^{-256} \cdot 2^{405}$	4.5024008
-103	后咸苾	$3^{103} \cdot 2^{-164}$	4.4931743
203	咸苾	$3^{-203} \cdot 2^{321}$	4.4843256
-156	后九德	$3^{156} \cdot 2^{-248}$	4.4750991
150	九德	$3^{-150} \cdot 2^{237}$	4.4662504
-209	后孔修	$3^{209} \cdot 2^{-332}$	4.4570239
97	孔修	$3^{-97} \cdot 2^{153}$	4.4481752
-262	后分积	$3^{262} \cdot 2^{-416}$	4.4389487
44	分积	$3^{-44} \cdot 2^{69}$	4.4301
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 37 含 13 个“半京”(8)夷则 $\leftrightarrow$ (20)解形/鲜刑

20	解形/鲜刑	$3^{-20} \cdot 2^{31}$	4.1955000
326	御叙	$3^{-326} \cdot 2^{516}$	4.1866496
-33	后白藏	$3^{33} \cdot 2^{-53}$	4.1774231
273	白藏	$3^{-273} \cdot 2^{432}$	4.1685744
-86	后阴德	$3^{86} \cdot 2^{-137}$	4.1593479
220	阴德	$3^{-220} \cdot 2^{348}$	4.1504992
-139	后气精	$3^{139} \cdot 2^{-221}$	4.1412727
167	气精	$3^{-167} \cdot 2^{264}$	4.132424
-192	后清爽	$3^{192} \cdot 2^{-305}$	4.1231975
114	清爽	$3^{-114} \cdot 2^{180}$	4.1143488
-245	后升商	$3^{245} \cdot 2^{-389}$	4.1051239
61	升商	$3^{-61} \cdot 2^{96}$	4.0962736
-298	后夷则	$3^{298} \cdot 2^{-473}$	4.0870471
8	夷则	$3^{-8} \cdot 2^{12}$	4.0781984
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 39 含 13 个“半京”(32)去南 $\leftrightarrow$ (44)分积

44	分积	$3^{-44} \cdot 2^{69}$	4.4301
350	蕤晋	$3^{-350} \cdot 2^{554}$	4.4212513
-9	反生南吕	$3^9 \cdot 2^{-15}$	4.412025
297	靡弁	$3^{-297} \cdot 2^{470}$	4.4031761
-62	后和庚	$3^{62} \cdot 2^{-99}$	4.3939496
244	和庚	$3^{-244} \cdot 2^{386}$	4.3851009
-115	后延乙	$3^{115} \cdot 2^{-183}$	4.3758744
191	延乙	$3^{-191} \cdot 2^{302}$	4.3670257
-168	后柔辛	$3^{168} \cdot 2^{-267}$	4.3577992
138	柔辛	$3^{-138} \cdot 2^{218}$	4.3489505
-221	后阳消	$3^{221} \cdot 2^{-351}$	4.339724
85	阳消	$3^{-85} \cdot 2^{134}$	4.3308753
-274	后去南	$3^{274} \cdot 2^{-435}$	4.3216488
32	去南	$3^{-32} \cdot 2^{50}$	4.3128001
生律编号	律名	相对波长	相对音高

(10)南吕部 表 41~45 南吕一部,三十四律;其形成 63 个“半京”区间。

186	允塞	$3^{-186} \cdot 2^{294}$	4.8181505
-173	后王猷	$3^{173} \cdot 2^{-275}$	4.808924
133	王猷	$3^{-133} \cdot 2^{210}$	4.8000753
-226	后中德	$3^{226} \cdot 2^{-359}$	4.7908488
80	中德	$3^{-80} \cdot 2^{126}$	4.782
-279	后归期	$3^{279} \cdot 2^{-443}$	4.7727736
27	归期	$3^{-27} \cdot 2^{42}$	4.7639249
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 42 含 13 个“半京”(15)结躬↔(27)归期

27	归期	$3^{-27} \cdot 2^{42}$	4.7639249
333	有截	$3^{-333} \cdot 2^{527}$	4.7550762
-26	后威远	$3^{26} \cdot 2^{-42}$	4.7458497
280	威远	$3^{-280} \cdot 2^{443}$	4.737001
-79	后抗节	$3^{79} \cdot 2^{-136}$	4.7277745
227	抗节	$3^{-227} \cdot 2^{359}$	4.7189258
-132	后晟阴	$3^{132} \cdot 2^{-210}$	4.7096993
174	晟阴	$3^{-174} \cdot 2^{275}$	4.7008506
-185	后羸中	$3^{185} \cdot 2^{-294}$	4.6916241
121	羸中	$3^{-121} \cdot 2^{191}$	4.6827754
-238	后肥通	$3^{238} \cdot 2^{-378}$	4.6735489
68	肥通	$3^{-68} \cdot 2^{107}$	4.6647002
-291	后结躬	$3^{291} \cdot 2^{-462}$	4.6554737
15	结躬	$3^{-15} \cdot 2^{23}$	4.646625
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 41 含 13 个“半京”(3)南吕↔(15)结躬

15	结躬	$3^{-15} \cdot 2^{23}$	4.646625
321	酉稔	$3^{-321} \cdot 2^{508}$	4.6377762
-38	后劲物	$3^{38} \cdot 2^{-61}$	4.6285497
268	劲物	$3^{-268} \cdot 2^{424}$	4.619701
-91	后素风	$3^{91} \cdot 2^{-145}$	4.6104745
215	素风	$3^{-215} \cdot 2^{340}$	4.6016258
-144	后敦实	$3^{144} \cdot 2^{-229}$	4.5923993
162	敦实	$3^{-162} \cdot 2^{256}$	4.5835506
-197	后捐秀	$3^{197} \cdot 2^{-313}$	4.5743241
109	捐秀	$3^{-109} \cdot 2^{172}$	4.5654754
-250	后白吕	$3^{250} \cdot 2^{-397}$	4.5562489
56	白吕	$3^{-56} \cdot 2^{88}$	4.5474002
-303	后南吕	$3^{303} \cdot 2^{-481}$	4.5381737
3	南吕	$3^{-3} \cdot 2^4$	4.5293250
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 45 含 11 个“半京”(51)夷汗↔(10)无射

10	无射	$3^{-10} \cdot 2^{15}$	5.0977500
316	光贲	$3^{-316} \cdot 2^{500}$	5.0889012
-43	后九有	$3^{43} \cdot 2^{-69}$	5.0796717
263	九有	$3^{-263} \cdot 2^{416}$	5.070826
-96	后亡劳	$3^{96} \cdot 2^{-153}$	5.0615995
210	亡劳	$3^{-210} \cdot 2^{332}$	5.0527508
-149	后悦使	$3^{149} \cdot 2^{-237}$	5.0435243
157	悦使	$3^{-157} \cdot 2^{248}$	5.0346756
-202	后均义	$3^{202} \cdot 2^{-321}$	5.0254491
104	均义	$3^{-104} \cdot 2^{164}$	5.0166004
-255	后夷汗	$3^{255} \cdot 2^{-405}$	5.0073739
51	夷汗	$3^{-51} \cdot 2^{80}$	4.9985252
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 44 含 13 个“半京”(39)未卯/未印↔(51)夷汗

51	夷汗	$3^{-51} \cdot 2^{80}$	4.9985252
357	归藏	$3^{-357} \cdot 2^{565}$	4.9896763
-2	反生无射	$3^2 \cdot 2^{-4}$	4.98045
304	蓄止	$3^{-304} \cdot 2^{481}$	4.9716011
-55	后贞坚	$3^{55} \cdot 2^{-88}$	4.9623746
251	贞坚	$3^{-251} \cdot 2^{397}$	4.9535259
-108	后道心	$3^{108} \cdot 2^{-172}$	4.9442994
198	道心	$3^{-198} \cdot 2^{313}$	4.9354507
-161	后分满	$3^{161} \cdot 2^{-256}$	4.9262242
145	分满	$3^{-145} \cdot 2^{229}$	4.917355
-214	后质随	$3^{214} \cdot 2^{-340}$	4.908149
92	质随	$3^{-92} \cdot 2^{145}$	4.8993003
-267	后未卯	$3^{267} \cdot 2^{-424}$	4.8900738
39	未卯/未印	$3^{-39} \cdot 2^{61}$	4.8812251
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 43 含 13 个“半京”(27)归期↔(39)未卯/未印

39	未卯/未印	$3^{-39} \cdot 2^{61}$	4.8812251
345	摇落	$3^{-345} \cdot 2^{546}$	4.8723761
-14	后搏讐	$3^{14} \cdot 2^{-23}$	4.8631499
292	搏讐	$3^{-292} \cdot 2^{462}$	4.8543009
-67	后葭收	$3^{67} \cdot 2^{-107}$	4.8450744
239	葭收	$3^{-239} \cdot 2^{378}$	4.8362257
-120	后允塞	$3^{120} \cdot 2^{-191}$	4.8269992



(11)无射部 表 46~49 无射一部,二十七律;共形成 50 个“半京”区间

表 47 含 13 个“半京”(22)闭掩/闭奄↔(34)邻齐 表 49 含 11 个“半京”(46)期保↔(5)应钟

34	邻齐	$3^{-34} \cdot 2^{53}$	5.3323501
340	明奎	$3^{-340} \cdot 2^{538}$	5.3235012
-19	后阏藏	$3^{19} \cdot 2^{-31}$	5.3142749
287	阏藏	$3^{-287} \cdot 2^{454}$	5.305426
-72	后旋春	$3^{72} \cdot 2^{-115}$	5.2961995
234	旋春	$3^{-234} \cdot 2^{370}$	5.2873508
-125	后日在	$3^{125} \cdot 2^{-199}$	5.2781243
181	日在	$3^{-181} \cdot 2^{286}$	5.2692756
-178	后藏遼	$3^{178} \cdot 2^{-283}$	5.2600491
128	藏遼	$3^{-128} \cdot 2^{202}$	5.2512004
-231	后降娄	$3^{231} \cdot 2^{-357}$	5.2419739
75	降娄	$3^{-75} \cdot 2^{118}$	5.2331252
-284	后闭掩	$3^{284} \cdot 2^{-451}$	5.2238987
22	闭掩/闭奄	$3^{-22} \cdot 2^{34}$	5.215050
生律编号	律名	相对波长	相对音高

5	应钟	$3^{-5} \cdot 2^{27}$	5.5488750
311	澄天	$3^{-311} \cdot 2^{492}$	5.540026
-48	后玄月	$3^{48} \cdot 2^{-77}$	5.5307995
258	玄月	$3^{-258} \cdot 2^{408}$	5.5219508
-101	后野色	$3^{101} \cdot 2^{-161}$	5.5127243
205	野色	$3^{-205} \cdot 2^{324}$	5.5038756
-154	后秋深	$3^{154} \cdot 2^{-245}$	5.4946491
152	秋深	$3^{-152} \cdot 2^{240}$	5.4858004
-207	后延年	$3^{207} \cdot 2^{-329}$	5.4765739
99	延年	$3^{-99} \cdot 2^{156}$	5.4677252
-260	后期保	$3^{260} \cdot 2^{-413}$	5.4584987
46	期保	$3^{-46} \cdot 2^{72}$	5.44965
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 46 含 13 个“半京”(10)无射↔(22)闭掩/闭奄

22	闭掩/闭奄	$3^{-22} \cdot 2^{34}$	5.215050
328	销祥	$3^{-328} \cdot 2^{519}$	5.2062012
-31	后恤衣	$3^{31} \cdot 2^{-50}$	5.1969749
275	恤衣	$3^{-275} \cdot 2^{435}$	5.188126
-84	后休老	$3^{84} \cdot 2^{-134}$	5.1788995
222	休老	$3^{-222} \cdot 2^{351}$	5.1700508
-137	后恭俭	$3^{137} \cdot 2^{-218}$	5.1608243
169	恭俭	$3^{-169} \cdot 2^{267}$	5.1519756
-190	后怀谦	$3^{190} \cdot 2^{-302}$	5.1427491
116	怀谦	$3^{-116} \cdot 2^{183}$	5.1339004
-243	后思冲	$3^{243} \cdot 2^{-386}$	5.1246739
63	思冲	$3^{-63} \cdot 2^{99}$	5.1158252
-296	后无射	$3^{296} \cdot 2^{-470}$	5.1065987
10	无射	$3^{-10} \cdot 2^{15}$	5.0977500
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 48 含 13 个“半京”(34)邻齐↔(46)期保

46	期保	$3^{-46} \cdot 2^{72}$	5.44965
352	无边	$3^{-352} \cdot 2^{557}$	5.4408013
-7	反生应钟	$3^7 \cdot 2^{-12}$	5.431575
299	息肩	$3^{-299} \cdot 2^{473}$	5.4227261
-60	后下济	$3^{60} \cdot 2^{-96}$	5.4134996
246	下济	$3^{-246} \cdot 2^{389}$	5.4046509
-113	后蓄敛	$3^{113} \cdot 2^{-180}$	5.3954244
193	蓄敛	$3^{-193} \cdot 2^{305}$	5.3865757
-166	后大蓄	$3^{166} \cdot 2^{-264}$	5.3773492
140	大蓄	$3^{-140} \cdot 2^{221}$	5.3685005
-219	后轨众	$3^{219} \cdot 2^{-348}$	5.359274
87	轨众	$3^{-87} \cdot 2^{137}$	5.3504253
-272	后邻齐	$3^{272} \cdot 2^{-432}$	5.3411988
34	邻齐	$3^{-34} \cdot 2^{53}$	5.3323501
生律编号	律名	相对波长	相对音高

(12)应钟部 表 50~53 应钟一部,二十八律;共形成 50 个“半京”区间。

表 51 含 13 个“半京”(17)迟内↔(29)未育

29	未育	$3^{-29} \cdot 2^{45}$	5.7834751
335	应徵	$3^{-335} \cdot 2^{530}$	5.7746262
-24	后动寂	$3^{24} \cdot 2^{-39}$	5.7653997
282	动寂	$3^{-282} \cdot 2^{446}$	5.756551
-77	后凝晦	$3^{77} \cdot 2^{-123}$	5.7473245
229	凝晦	$3^{-229} \cdot 2^{362}$	5.7384758
-130	后姑射	$3^{130} \cdot 2^{-207}$	5.7292493
176	姑射	$3^{-176} \cdot 2^{278}$	5.7204006
-183	后而又	$3^{183} \cdot 2^{-291}$	5.7111741
123	而又	$3^{-123} \cdot 2^{194}$	5.7023254
-236	后无为	$3^{236} \cdot 2^{-375}$	5.6930989
70	无为	$3^{-70} \cdot 2^{110}$	5.6842502
-289	后迟内	$3^{289} \cdot 2^{-459}$	5.6750237
17	迟内	$3^{-17} \cdot 2^{26}$	5.6661750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 53 含 11 个“半京”(41)迟时↔(0)黄钟半律

359	安运	$3^{-359} \cdot 2^{588}$	6.0092266
0	黄钟半律	$3^0 \cdot 2^1$	6
306	亿兆	$3^{-306} \cdot 2^{484}$	5.991151
-53	后八荒	$3^{53} \cdot 2^{-85}$	5.9819245
253	八荒	$3^{-253} \cdot 2^{400}$	5.9730758
-106	后九野	$3^{106} \cdot 2^{-169}$	5.9638493
200	九野	$3^{-200} \cdot 2^{316}$	5.9550006
-159	后无休	$3^{159} \cdot 2^{-253}$	5.9457741
147	无休	$3^{-147} \cdot 2^{232}$	5.9369254
-212	后方制	$3^{212} \cdot 2^{-337}$	5.9276989
94	方制	$3^{-94} \cdot 2^{148}$	5.9188502
-265	后迟时	$3^{265} \cdot 2^{-421}$	5.9096237
41	迟时	$3^{-41} \cdot 2^{64}$	5.900775
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 50 含 13 个“半京”(5)应钟↔(17)迟内

17	迟内	$3^{-17} \cdot 2^{26}$	5.6661750
323	静谧	$3^{-323} \cdot 2^{511}$	5.6573262
-36	后又定	$3^{36} \cdot 2^{-58}$	5.6480997
270	又定	$3^{-270} \cdot 2^{427}$	5.639251
-89	后功成	$3^{89} \cdot 2^{-142}$	5.6300245
217	功成	$3^{-217} \cdot 2^{343}$	5.6211758
-142	后据始	$3^{142} \cdot 2^{-226}$	5.6119493
164	据始	$3^{-164} \cdot 2^{259}$	5.6031006
-195	后祖微	$3^{195} \cdot 2^{-310}$	5.5938741
111	祖微	$3^{-111} \cdot 2^{175}$	5.5850254
-248	后分焉	$3^{248} \cdot 2^{-394}$	5.5757989
58	分焉	$3^{-58} \cdot 2^{91}$	5.5669502
-301	后应钟	$3^{301} \cdot 2^{-478}$	5.5577237
5	应钟	$3^{-5} \cdot 2^{27}$	5.5488750
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表 52 含 13 个“半京”(29)未育↔(41)迟时

41	迟时	$3^{-41} \cdot 2^{64}$	5.900775
347	修复	$3^{-347} \cdot 2^{549}$	5.8919263
-12	后天长	$3^{12} \cdot 2^{-20}$	5.8826999
294	天长	$3^{-294} \cdot 2^{465}$	5.8738511
-65	后地久	$3^{65} \cdot 2^{-104}$	5.8646246
241	地久	$3^{-241} \cdot 2^{381}$	5.8557759
-118	后无疆	$3^{118} \cdot 2^{-188}$	5.8465494
188	无疆	$3^{-188} \cdot 2^{297}$	5.8377007
-171	后万寿	$3^{171} \cdot 2^{-272}$	5.8284742
135	万寿	$3^{-135} \cdot 2^{213}$	5.8196255
-224	后万机	$3^{224} \cdot 2^{-356}$	5.810399
82	万机	$3^{-82} \cdot 2^{129}$	5.8015503
-277	后未育	$3^{277} \cdot 2^{-440}$	5.7923238
29	未育	$3^{-29} \cdot 2^{45}$	5.7834751
生律编号	律名	相对波长	相对音高

从以上数据梳理,可以清楚看出,反生至黄钟半律已经达到黄钟还原,安运已经超过了黄钟半律的音高。所以,将“安运”设在[应钟部]是不合逻辑的。将它与表 1 中的一306 后黄钟 0.0088487 相比较可看出,现在我们已经用-306 后黄钟取代了 359 安运。

### 三、音分与频率对照表

使用说明:

1. 本表以十二平均律为框架,以音分数表示相对音高,以  $c^1$  为基准,其相对音高为 0。

2. 国际标准音  $a^1$  (小字 1 组  $a$ ) = 440 Hz。

3. 本表仅给出小字 1 组  $c^1 - b^1$  的频率数,其它八度组按倍半频率关系求得。

$c^1$ (0~100)				$c^1$ (100~200)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
0	261.630	50	269.296	100	277.187	150	285.310
1	261.781	51	269.452	101	277.347	151	285.474
2	261.932	52	269.608	102	277.508	152	285.639
3	262.084	53	269.763	103	277.668	155	285.804
4	262.235	54	269.919	104	277.829	154	285.970
5	262.387	55	270.075	105	277.989	155	286.135
6	262.538	56	270.231	106	278.150	156	286.300
7	262.690	51	270.387	107	278.310	157	286.465
8	262.842	58	270.544	108	278.471	158	286.631
9	262.994	59	270.700	109	278.632	159	286.797
10	263.146	60	270.856	110	278.793	160	286.962
11	263.298	61	271.013	111	278.954	161	287.128
12	263.450	62	271.169	112	279.115	162	287.294
13	263.602	63	271.326	113	279.277	163	287.460
14	263.754	64	271.483	114	279.438	164	287.626
15	263.907	65	271.640	115	279.560	165	287.792
16	264.059	66	271.797	116	279.761	166	287.959
17	264.212	67	271.954	117	279.923	167	288.125
18	264.364	68	272.111	118	280.084	168	288.291
19	264.517	69	272.268	119	280.246	169	288.458
20	264.670	70	272.425	120	280.408	170	288.625
21	264.823	71	272.583	121	280.570	171	288.791
22	264.976	72	272.740	122	280.732	172	288.958
23	265.129	73	272.898	123	280.894	173	289.125
24	265.282	74	273.056	124	281.057	174	289.292
25	265.435	75	273.213	125	281.220	175	289.459
26	265.589	76	273.371	126	281.382	176	289.627
27	265.742	77	273.529	127	281.544	177	289.794
28	265.896	78	273.687	128	281.707	178	289.961
29	266.049	79	273.845	129	281.870	179	290.129
30	266.203	80	274.004	130	282.032	180	290.297
31	266.357	81	274.162	131	282.195	181	290.464
32	266.511	82	274.320	132	282.358	182	290.632
33	266.665	83	274.479	133	282.522	183	290.800
34	266.819	84	274.637	134	282.685	184	290.968
35	266.973	85	274.796	135	282.848	185	291.136
36	267.127	86	274.955	136	283.012	186	291.304
37	267.282	87	275.114	137	283.175	187	291.473
38	267.436	88	275.273	138	283.339	188	291.641
39	267.590	89	275.432	139	283.502	189	291.810
40	267.745	90	275.591	140	283.666	190	291.978
41	267.900	91	275.750	141	283.830	191	292.147
42	268.055	92	275.909	142	283.994	192	292.316
43	268.210	93	276.069	143	284.158	193	292.485
44	268.365	94	276.228	144	284.322	194	292.654
45	268.520	95	276.388	145	284.487	195	292.823
46	268.675	96	276.548	146	284.651	196	292.992
47	268.830	97	276.707	147	284.816	197	293.161
48	268.985	98	276.867	148	284.980	198	293.331
49	269.141	99	277.027	149	285.145	199	293.500
50	269.296	100	277.187	150	285.310	200	293.670

d' (200~300)				d' (300~400)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
200	293.670	250	302.275	300	311.132	350	320.249
201	293.840	251	302.450	301	311.312	351	320.434
202	294.009	252	302.624	302	311.492	352	320.619
205	294.179	253	302.799	303	311.672	353	320.805
204	294.349	254	302.974	304	311.852	354	320.990
205	294.519	255	303.149	305	312.032	355	321.175
206	294.689	256	303.324	306	312.212	356	321.361
207	294.860	257	303.450	307	312.393	357	321.547
208	295.030	258	303.675	308	312.573	358	321.732
209	295.200	259	303.850	309	312.754	359	321.918
210	295.371	260	304.026	310	312.935	360	322.104
211	295.542	261	304.201	311	313.115	361	322.290
212	295.712	262	304.377	312	313.296	362	322.477
213	295.883	263	304.553	313	313.477	363	322.663
214	296.054	264	304.729	314	313.658	364	322.849
215	296.225	265	304.905	315	313.840	365	323.036
216	296.396	266	305.081	316	314.021	366	323.223
217	296.568	267	305.258	317	314.202	387	323.409
218	296.739	268	305.434	318	314.384	368	323.596
219	296.910	269	305.611	319	314.566	369	323.783
220	297.082	270	305.787	320	314.747	370	323.970
221	297.257	271	305.964	321	314.929	371	324.157
222	297.425	272	306.141	322	315.111	372	324.345
223	297.597	273	306.318	323	315.293	373	324.532
224	297.769	274	306.495	324	315.476	374	324.720
225	297.941	275	306.672	325	315.658	375	324.907
226	298.113	276	306.849	326	315.840	376	325.095
227	298.286	277	307.026	327	316.023	377	325.283
228	298.458	278	307.203	328	316.205	378	325.471
229	298.630	279	307.381	329	316.388	379	325.659
230	298.803	280	307.559	330	316.571	380	325.847
231	298.976	281	307.736	331	316.754	381	326.035
232	299.148	282	307.914	332	316.937	382	326.224
233	299.321	283	308.092	333	317.120	383	326.412
234	299.494	284	308.270	334	317.303	384	326.601
235	299.667	285	308.448	335	317.486	385	326.789
236	299.840	286	308.626	336	317.670	386	326.978
237	300.014	287	308.805	337	317.853	387	327.167
238	300.187	288	308.983	338	318.037	388	327.356
239	300.360	289	309.162	339	318.221	389	327.545
240	300.534	290	309.340	340	318.405	390	327.735
241	300.708	291	309.519	341	318.589	391	327.924
242	300.881	292	309.698	342	318.773	392	328.113
243	301.055	293	309.877	343	318.957	393	328.303
244	301.229	294	310.056	344	319.141	394	328.493
245	301.403	295	310.235	345	319.326	395	328.683
246	301.577	296	310.414	346	319.510	396	328.872
247	301.752	297	310.594	347	319.695	397	329.062
248	301.926	298	310.773	348	319.879	398	329.253
249	302.100	299	310.953	349	320.064	399	329.443
250	302.275	300	311.132	350	320.249	400	329.633

e <sup>1</sup> (400~500)				f <sup>1</sup> (500~600)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
400	329.633	450	339.292	500	349.234	550	359.467
401	329.824	451	339.488	501	349.436	551	359.675
402	330.014	452	339.684	502	349.638	552	359.883
403	330.205	453	339.881	503	349.840	553	360.091
404	330.396	454	340.077	504	350.042	554	360.299
405	330.587	455	340.273	505	350.244	555	360.507
406	330.778	456	340.470	506	350.447	556	360.715
407	330.969	457	340.667	507	350.649	557	360.924
408	331.160	458	340.864	508	350.852	558	361.132
409	331.351	459	341.061	509	351.054	559	361.341
410	331.543	460	341.258	510	351.257	560	361.550
411	331.734	461	341.455	511	351.460	561	361.759
412	331.926	462	341.652	512	351.663	562	361.968
413	332.118	463	341.849	513	351.866	563	362.177
414	332.310	464	342.047	514	352.070	564	362.386
415	332.502	465	342.245	515	352.273	565	362.596
416	332.694	466	342.442	516	352.477	566	362.805
417	332.886	467	342.640	517	352.680	567	363.015
418	333.078	468	342.838	518	353.884	568	363.224
419	333.271	469	343.036	519	353.088	569	363.434
420	333.463	470	343.235	520	353.292	570	363.644
421	333.656	471	343.433	521	353.496	571	363.854
422	333.849	472	343.631	522	353.706	572	364.065
423	334.042	473	343.830	523	353.905	573	364.275
424	334.235	474	344.028	524	354.109	574	364.485
425	334.428	475	344.227	525	354.314	575	364.696
426	334.621	476	344.426	526	354.519	576	364.907
427	334.814	477	344.625	527	354.723	577	365.118
428	335.008	478	344.824	528	354.928	578	365.329
429	335.201	479	345.024	529	355.133	579	365.540
430	335.395	480	345.223	530	355.339	580	365.751
431	335.589	481	345.422	531	355.544	581	365.962
432	335.783	482	345.622	532	355.749	582	366.173
433	335.977	483	345.822	533	355.955	583	366.385
434	336.171	484	345.021	534	356.161	584	366.597
435	336.365	485	346.221	535	356.366	585	366.809
436	336.559	486	346.421	536	356.572	586	367.021
437	336.754	487	346.622	537	356.778	587	367.233
438	336.948	488	346.822	538	356.984	588	367.445
439	337.143	489	347.022	539	357.101	589	367.657
440	337.338	490	347.223	540	357.397	590	367.870
441	337.533	491	347.423	541	357.604	591	368.082
442	337.728	492	347.624	542	357.810	592	368.295
443	337.923	493	347.825	543	358.017	593	368.508
444	338.118	494	348.026	544	358.224	594	368.721
445	338.314	495	348.227	545	358.431	595	368.934
446	338.509	496	348.428	546	358.638	596	369.147
447	338.705	497	348.629	547	358.845	597	369.360
448	338.900	498	348.831	548	359.052	598	369.573
449	339.096	499	349.032	549	359.260	599	360.787
450	339.292	500	349.234	550	359.467	600	370.001

*f <sup>1</sup> (600~700)				g <sup>1</sup> (700~800)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
600	370.001	650	380.843	700	392.002	750	403.489
601	370.214	651	381.063	701	392.229	751	403.722
602	370.428	652	381.283	702	392.455	752	403.955
603	370.642	653	381.503	703	392.682	753	404.188
604	370.857	654	381.723	704	392.909	754	404.422
605	371.071	655	381.944	705	393.136	755	404.656
606	371.285	656	382.165	706	393.363	756	404.889
607	371.500	657	382.386	707	393.590	757	405.123
608	371.714	658	382.606	708	393.818	758	405.357
609	371.929	659	382.828	709	394.045	759	405.592
610	372.144	660	383.049	710	394.273	760	405.826
611	372.359	661	383.270	711	394.501	761	406.060
612	372.574	662	383.492	712	394.729	762	406.295
613	372.790	663	383.713	713	394.957	763	406.530
614	373.005	664	383.935	714	395.185	764	406.765
615	373.220	665	384.157	715	395.413	765	407.000
616	373.436	666	384.379	716	395.642	766	407.235
617	373.652	667	384.601	717	395.870	767	407.470
618	373.868	668	384.823	718	396.099	768	407.706
619	374.084	669	385.045	719	396.328	769	407.941
620	374.300	670	385.268	720	396.557	770	408.177
621	374.516	671	385.490	721	396.786	771	408.413
622	374.733	672	385.713	722	397.015	772	408.649
623	374.949	673	385.936	723	397.245	773	408.885
624	375.166	674	386.159	724	397.474	774	409.121
625	375.382	675	386.382	725	397.704	775	409.357
626	375.599	676	386.605	726	397.934	776	409.594
627	375.816	677	386.829	727	398.164	777	409.831
628	376.034	678	387.052	728	398.394	778	410.067
629	376.251	679	387.276	729	398.624	779	410.304
630	376.468	680	387.500	730	398.854	780	410.541
631	376.686	681	387.723	731	399.085	781	410.779
632	376.903	682	387.947	732	399.315	782	411.016
633	377.121	683	388.172	733	399.546	783	411.254
634	377.339	684	388.396	734	399.777	784	411.491
635	377.557	685	388.620	735	400.008	785	411.729
636	377.775	686	388.845	736	400.239	786	411.967
637	377.993	687	389.070	737	400.470	787	412.205
638	378.212	688	389.294	738	400.702	788	412.443
639	378.430	689	389.519	739	400.933	789	412.681
640	378.649	690	389.744	740	401.165	790	412.920
641	378.868	691	389.970	741	401.396	791	413.158
642	379.087	692	390.195	742	401.628	792	413.397
643	379.306	693	390.420	743	401.860	793	413.636
644	379.525	694	390.646	744	402.093	794	413.873
645	379.744	695	390.872	745	402.325	795	414.114
646	379.964	696	391.097	746	402.557	796	414.353
647	380.183	697	391.323	747	402.790	797	414.593
648	380.403	698	391.550	748	403.023	798	414.832
649	380.623	699	391.776	749	403.256	799	415.072
650	380.843	700	392.002	750	403.489	800	415.312

$g^1$ (800~900)				$a^1$ (900~1000)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
800	415.321	850	427.481	900	440.007	950	452.901
801	415.552	851	427.728	901	440.262	951	453.162
802	415.792	852	427.975	902	440.516	952	453.424
803	416.032	853	428.223	903	440.771	953	453.686
804	416.272	854	428.470	904	441.025	954	453.948
805	416.513	855	428.718	905	441.280	955	454.211
806	416.754	856	428.965	906	441.535	956	454.473
807	416.994	857	429.213	907	441.790	957	454.736
808	417.235	858	429.461	908	442.045	958	454.998
809	417.476	859	429.709	909	442.301	959	455.261
810	417.718	860	429.958	910	442.556	960	455.524
811	417.959	861	430.206	911	442.812	961	455.787
812	418.200	862	430.455	912	443.068	962	456.051
813	418.442	863	430.703	913	443.324	963	456.314
814	418.684	864	430.952	914	443.580	964	456.578
815	418.926	865	431.201	915	443.836	965	456.842
816	419.168	866	431.450	916	444.093	966	457.106
817	419.410	867	431.700	917	444.349	967	457.370
818	419.652	868	431.949	918	444.606	968	457.634
819	419.895	869	432.199	919	444.863	969	457.899
820	420.138	870	432.448	920	445.120	970	458.163
821	420.380	871	432.698	921	445.377	971	458.428
822	420.623	872	432.948	922	445.635	972	458.693
823	420.866	873	433.198	923	445.892	973	458.958
824	421.109	874	433.449	924	446.150	974	459.223
825	421.353	875	433.699	925	446.406	975	459.488
826	421.596	876	433.950	926	446.665	976	459.754
827	421.840	877	434.200	927	446.924	977	460.019
828	422.083	878	434.451	928	447.182	978	460.285
829	422.327	879	434.702	929	447.440	979	460.551
830	422.571	880	434.954	930	447.699	980	460.817
831	422.815	881	435.205	931	447.957	981	461.083
832	423.060	882	435.456	932	448.216	982	461.350
833	423.304	883	435.708	933	448.475	983	461.616
834	423.549	884	435.960	934	448.734	984	461.883
835	423.793	885	436.212	935	448.994	985	462.150
836	424.038	886	436.464	936	449.253	986	462.417
837	424.283	887	436.716	937	449.513	987	462.684
838	424.528	888	436.968	938	449.772	988	462.952
839	424.774	889	437.221	939	450.032	989	463.219
840	425.019	890	437.473	940	450.292	990	463.487
841	425.265	891	437.726	941	450.552	991	463.755
842	425.510	892	437.979	942	450.813	992	464.022
843	425.756	893	438.232	943	451.073	993	464.291
844	426.002	894	438.485	944	451.334	994	464.559
845	426.248	895	438.739	945	451.595	995	464.827
846	426.495	896	438.992	946	451.855	996	465.096
847	426.741	897	439.246	947	452.117	997	465.365
848	426.988	898	439.499	948	452.378	998	465.633
849	427.234	899	439.753	949	452.639	999	465.902
850	427.481	900	440.007	950	452.901	1000	466.172

*a <sup>1</sup> (1000~1100)				b <sup>1</sup> (1100~1200)			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
1000	466.172	1050	479.832	1100	493.892	1150	508.364
1001	466.441	1051	480.109	1101	494.177	1151	508.658
1002	466.711	1052	480.386	1102	494.463	1152	508.951
1003	466.982	1053	480.664	1103	494.748	1153	509.245
1004	467.250	1054	480.941	1104	495.034	1154	509.540
1005	467.520	1055	481.219	1105	495.320	1155	509.834
1006	467.754	1056	481.497	1106	495.606	1156	510.120
1007	468.060	1057	481.776	1107	495.893	1157	510.423
1008	468.331	1058	482.054	1108	496.179	1158	510.718
1009	468.601	1059	482.332	1109	496.466	1159	511.013
1010	468.872	1060	482.611	1110	496.753	1160	511.309
1011	469.143	1061	482.890	1111	497.040	1161	511.604
1012	469.414	1062	483.169	1112	497.327	1162	511.900
1013	469.685	1063	483.448	1113	497.614	1163	512.196
1014	469.957	1064	483.728	1114	497.902	1164	512.491
1015	470.228	1065	484.007	1115	498.190	1165	512.788
1016	470.500	1066	484.287	1116	498.477	1166	513.084
1017	470.772	1067	484.566	1117	498.765	1167	513.380
1018	471.044	1068	484.846	1118	499.054	1168	513.677
1019	471.316	1069	485.127	1119	499.342	1169	513.974
1020	471.588	1070	485.407	1120	499.630	1170	514.271
1021	471.861	1071	485.687	1121	499.919	1171	514.568
1022	472.133	1072	485.968	1122	500.208	1172	514.865
1023	472.406	1073	486.249	1123	500.497	1173	515.163
1024	472.679	1074	486.530	1124	500.786	1174	515.460
1025	472.952	1075	486.811	1125	501.075	1175	515.758
1026	473.226	1076	487.092	1126	501.365	1176	516.056
1027	473.499	1077	487.374	1127	501.655	1177	516.364
1028	473.773	1078	487.655	1128	501.945	1178	516.653
1029	474.046	1079	487.937	1129	502.235	1179	516.951
1030	474.320	1080	488.219	1130	502.525	1180	517.250
1031	474.594	1081	488.501	1131	502.815	1181	517.549
1032	474.868	1082	488.783	1132	503.106	1182	517.848
1033	475.143	1083	489.066	1133	503.396	1183	518.147
1034	475.417	1084	489.348	1134	503.687	1184	518.446
1035	475.692	1085	489.631	1135	503.978	1185	518.746
1036	475.967	1086	489.914	1136	504.269	1186	519.046
1037	476.242	1087	490.197	1137	504.561	1187	519.346
1038	476.517	1088	490.480	1138	504.852	1188	519.646
1039	476.792	1089	490.764	1139	505.144	1189	519.946
1040	477.068	1090	491.047	1140	505.436	1190	520.246
1041	477.344	1091	491.331	1141	505.728	1191	520.547
1042	477.619	1092	491.615	1142	506.020	1192	520.848
1043	477.895	1093	491.899	1143	506.312	1193	521.149
1044	478.171	1094	492.183	1144	506.605	1194	521.450
1045	478.448	1095	492.467	1145	506.898	1195	521.751
1046	478.724	1096	492.752	1146	507.191	1196	522.052
1047	479.001	1097	493.037	1147	507.484	1197	522.354
1048	479.278	1098	493.321	1148	507.777	1198	522.656
1049	479.554	1099	493.606	1149	508.070	1199	522.958
1050	479.832	1100	493.892	1150	508.364	1200	523.260



## 参考资料

### I. 古籍资料：（以成书年代为序）

《管子》注释本，孙波，注释，1版，北京：华夏出版社，2000。

《吕氏春秋》高诱，注，上海：上海古籍出版社影印本，1988。

《淮南子·卷三·天文训》，《诸子集成》第7卷第35页，上海书店影印出版，1986年7月第一版，1991年第6次印刷。

《史记·律书》，《历代乐志律志校释》第一分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社，1999年9月北京第一版。

《后汉书·卷九十一·律历志上》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《宋书·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社，1999。

《隋书·卷十六·律历志》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《旧五代史·卷一百四十四·志七·乐志下》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《碣石调·幽兰》《琴曲集成》（一），中华书局1980年影印本。

《琴籍·明徽暗徽法》晚唐陈拙撰，见《琴书大全》。

《梦溪笔谈》，沈括撰。

《朱子大全集·卷六十六·琴律说》，约1190年，抄本。

《琴统·十则》，1268年成书，徐理撰。见《西麓堂琴统·琴声卷一》。

《琴苑要录》，宋人辑，明代抄本，1925年冯水据铁琴铜剑楼藏本再抄。

《二十五史》，上海古籍出版社。

《太音大全集》，成书于1413年以前，据北大图书馆藏明刊本影印。

《神奇秘谱》，成书于1425年，朱权辑，明刻本影印本。

《风宣玄品》，成书于1539年，明徽藩朱厚爝辑刊。

《西麓堂琴统》，成书于1549年，明刻本。

《琴书大全》，万历庚寅年（1590年）刊本。

《律学新说》[明]朱载堉,撰.冯文慈,点注.1版.北京:人民音乐出版社,1986.

《律吕精义》[明]朱载堉,撰.冯文慈,点校.1版.北京:人民音乐出版社,1998.

《五知斋琴谱》徐琪编,康熙六十年(1721年)首次刊印,本文引自雍正二年(1724年)红杏山房藏版影印版.

《琴学入门》成书于1864年,同治三年刻本.

## II. 近现代资料:(以著者姓氏汉语拼音首位字母为序)

### 1. 专著及文集:

[1] 陈应时.中国乐律学探微.1版.上海:上海音乐学院音乐出版社,2004.

[2] 崔宪.曾侯乙编钟钟铭校释及律学研究.1版.北京:人民音乐出版社,1997.

[3] 戴念祖.中国声学史.1版.长沙:湖南教育出版社,2001.

[4] 韩宝强.音的历程.1版.北京:中国文联出版社,2003.

[5] 黄翔鹏.溯流探源——中国传统音乐研究论文集.1版.北京:人民音乐出版社,1993.

[6] 黄翔鹏.中国人的音乐和音乐学.1版.青岛:山东文艺出版社,1997.

[7] 黄翔鹏.律学.中国大百科全书·音乐舞蹈卷.1版.北京:中国大百科全书出版社,1989.

[8] 李玫.“中立音”音律现象的研究(2000年度博士论文).1版.上海:上海音乐学院音乐出版社,2005.

[9] 缪天瑞.律学.1版.北京:万叶书店,1950;2版.北京:人民音乐出版社,1963;3版.北京:人民音乐出版社,1983;4版.北京:人民音乐出版社,1996.

[10] 王光祈.王光祈音乐论著选集(上、下册).冯文慈、俞玉滋,选注.1版.北京:人民音乐出版社,1993.

[11] 王子初. 荀勖笛律研究. 1版. 北京: 人民音乐出版社, 1995.

[12] 杨荫浏. 杨荫浏音乐论文选集. 1版. 上海: 上海文艺出版社, 1986.

[13] 赵宋光. 赵宋光文集 (第二卷). 1版. 广州: 广州花城出版社, 2001.

## 2. 论文

[1] 陈应时. 论证中国古代的纯律理论. 中央音乐学院学报, 1983 (1).

[2] 陈应时. 律学研究刍议. 中国音乐, 1984 (2).

[3] 陈应时. “〈淮南子〉律数”之迷. 乐府新声, 1984 (3).

[4] 陈应时. 王朴律究竟是一种什么律. 交响, 1985 (2).

[5] 陈应时. 中国古代文献记载中的“律学”. 中国音乐, 1987 (2).

[6] 陈其射. 解放后我国律学研究简介. 中国音乐史学习参考资料, 1985 (7).

[7] 陈其射. 试论我国早期律学思维. 阜阳师范学院学报, 1986 (3).

[8] 陈其射. 再谈王朴律——兼答王子初同志. 交响, 1989 (2).

[9] 程云. 繁难的理论与多彩的实践——也算参与“七平均律”的讨论. 民族民间音乐, 1986 (4).

[10] 戴念祖. 古代编钟发音的物理特性. 百科知识, 1980 (8).

[11] 韩宝强. 论陕西民间音乐的律制. 学习与研究, 1985 (2).

[12] 何昌林. 论“纯律化”. 乐府新声, 1983 (4).

[13] 黄翔鹏. 先秦音乐文化的古乐器——曾侯乙墓古乐器. 文物, 1979 (7).

[14] 黄翔鹏. 曾侯乙钟磬铭文乐学体系初探. 音乐研究, 1981 (1). (现收入《溯流探源——中国传统音乐研究论文集》. 1版. 北京: 人民音乐出版社, 1993: 128—180.)

[15] 黄翔鹏. 均钟考. 黄钟, 1989 (1、2). (现收入个人文集《中国人的音乐和音乐学》. 1版. 青岛: 山东文艺出版社, 1997: 175—214.)

[16] 姜夔. 蒙古族民歌中羽调式的律制特点. 中央音乐学院学报,

1985 (2).

[17] 姜夔. 湖南花鼓戏《刘海砍樵》头段的律制特点. 中央音乐学院学报, 1986 (3).

[18] 刘彤文. 增六和弦用法的理论辨析. 中央音乐学院学报, 2004 (3).

[19] 吕自强. 琵琶旧七品和中立音. 中国音乐, 1985 (1).

[20] 吕自强. 音律理论和音乐实践. 交响, 1986 (1).

[21] 王子初. 也谈王朴律——兼与陈应时同志商榷. 交响, 1987 (1): 18—20.

[22] 吴彝. 传统琵琶的特殊品位对乐曲的影响. 中国音乐, 1986 (2): 48—50.

[23] 杨没累. 淮南子的乐律学. 《没累文存》泰乐图书局民国 18 年 (1929 年) 版.

[24] 杨荫浏. 七弦琴徽分位置与其音程比值. 礼乐, 1948 (1). (《杨荫浏音乐论文选集》. 1 版. 上海: 上海文艺出版社, 1986: 163—171.)

[25] 杨荫浏. 谈琵琶音律. 《民族音乐论文集》(第三集) 音乐出版社 1958 年版.

[26] 杨荫浏. 管律辨讹. 文艺研究, 1979 (4). (现收入《杨荫浏音乐论文选集》)

[27] 杨荫济. 三律考. 音乐研究, 1982 (1). (现收入《杨荫浏音乐论文选集》)

[28] 应有勤. 口弦音律与民族音体系. 民族音乐, 1987 (2).

[29] 应有勤. 论东方民族乐律的不确定性. 中国音乐学, 1987 (3).

[30] 应有勤. 重新认识甘美兰的斯连德若音阶. 中国音乐学, 1997 (2): 5—18; 1997 (3): 107—124.

[31] 赵宋光. 关于  $\frac{3}{4}$  音的律学假设. 中央音乐学院学报, 1982 (2): 8—12. (现收入《赵宋光文集》第二卷)

[32] 赵宋光. 数在音乐表现手段中的意义. 美学, 1983 (5): 179—

198. (现收入《赵宋光文集》第二卷)

[33] 赵宋光. 理论律学的基本方法. 音乐艺术, 1984 (3): 35—42.  
(现收入《赵宋光文集》第二卷)

[34] 赵宋光. 中华律学传统的复兴与开拓. 中国音乐学, 1986 (3): 4—8. (现收入《赵宋光文集》第二卷)

[35] 赵宋光. 律学研究中的微言大义. 音乐艺术, 1987 (4): 37—40.

[36] 赵宋光. 一笔恼人遗产的松快清理. 音乐研究, 1993 (3): 57—68. (现收入《赵宋光文集》第二卷)

[37] 赵宋光. 借助数理为音乐回归自然辨明航向. 2001 年春在广东省艺术中专的讲座讲义. (现收入《赵宋光文集》第二卷)

[38] 赵宋光. 七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解. 中央音乐学院学报, 2001, 3: 26—37.

[39] 赵宋光. 古琴微分的顺逆推算. 音乐艺术, 2001 (4): 34—39.

[40] 郑荣达. 淮南律辨. 黄钟, 1987 (1): 29—35.

[41] 郑荣达. 王朴密率解. 黄钟, 1989 (3): 1—8.

[42] 中国艺术研究所, 新疆艺术研究所. “新疆维吾尔族音乐乐律与调式问题讨论会”测音工作报告. 新疆艺术, 1986 (5).

[43] 朱之屏. 从泛音对湖南民歌的影响谈起. 音乐论丛, 1980 (3).

### Ⅲ. 外文资料 (按人名首位字母为序):

[1] STEVIN, SIMON. Vande Spiegheling der Singconst (Dutch, 《歌唱艺术的理论》成书于 16 世纪末, 发表于 1884 年). Adriaan Fokker 译 “On the theory of the art of singing”, In Principal Works of Simon Stevin vol. 5, pp. 415—464 (《西蒙·斯台文文集第五卷》) Adriaan Fokker 辑, 阿姆斯特丹 1955—1966 年.

[2] THOMAS D. ROSSING. The Science of Sound. Reading (Mas) Addison-Wesley. 1982.